Ist logisches Wissen informativ?

Christopher von Bülow*

16. Oktober 2003

Es wird manchmal behauptet, Tautologien[1] seien nicht informativ, sondern inhaltsleer; sie würden uns nichts über die Welt sagen. So schreibt Wittgenstein im *Tractatus logico-philosophicus*:

> Die Sätze der Logik sind Tautologien. Die Sätze der Logik sagen also nichts. [. . .] Theorien, die einen Satz der Logik gehaltvoll erscheinen lassen, sind immer falsch. (6.1, 6.11, 6.111)

Da Tautologien *immer* wahr sind, ganz egal, wie es sich in der Welt verhält, können sie uns in der Tat nichts über den tatsächlichen Zustand der Welt sagen. Andererseits scheinen wir aber doch etwas dazuzulernen, wenn uns jemand etwa sagt oder sogar beweist, dass

$$\big[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)\big] \;\leftrightarrow\; \big[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r\big]$$

eine Tautologie ist. Lernen wir dabei nur, dass Sätze dieser Gestalt Tautologien sind (was wir vorher vielleicht noch nicht wussten)? Oder ist es auch zu irgendetwas gut, *Sätze von dieser Gestalt* zu wissen? Aber wenn Sätze von dieser Gestalt uns nichts darüber sagen, wie es sich in der Welt verhält, dann hilft uns dieses Wissen offenbar nicht bei der Entscheidung weiter, was wir glauben, geschweige denn, was wir tun sollen. Wozu ist es also nützlich, inwiefern ist es informativ?

Eine analoge Frage kann man für logische Schlüsse[2] stellen. In gewissem Sinne erweitert das Ziehen logischer Schlüsse unser Wissen nicht, denn die in der Konklusion enthaltene Information ist ja offenbar in den Prämissen schon vollständig enthalten. Wozu ist es also gut, Schlüsse zu beherrschen? Irgendwie scheint es doch nützlich zu sein, logisch schließen zu können, aber wie kann das sein, wenn wir dabei nichts dazulernen, was wir nicht schon vorher wussten?

Nun scheint es bei Schlüssen *Grade* der Informativität zu geben. Der Schluss

$$p \to \neg q \;\models\; p \to \neg q \tag{1}$$

scheint weniger informativ (oder interessant) zu sein als

$$p \to \neg q \;\models\; (p \to \neg q) \wedge (p \to \neg q), \tag{2}$$

und dieser wiederum weniger informativ als

$$p \to \neg q \;\models\; q \to \neg p. \tag{3}$$

*eMail: Christopher.von.Buelow@uni.kn; Website: www.uni.kn/FuF/Philo/Philosophie/philosophie/index.php?article_id=88.

[1] Ich verwende den Begriff „Tautologie“ hier in einem weiten Sinne, der alle logischen Wahrheiten umfassen soll, insbesondere z. B. prädikatenlogische.

[2] Mit ‚Schlüssen‘ meine ich i. a. schon *gültige* Schlüsse.

Aber in gewissem Sinne steht bei allen drei Schlüssen links und rechts dasselbe: Es wird immer derselbe Sachverhalt beschrieben, Prämisse und Konklusion haben immer dieselben Wahrheitsbedingungen („Mindestens eins von p und q muss falsch sein"). Beim Übergang von Prämisse zu Konklusion kommt in diesem Sinne nirgends Information dazu. Dennoch ist (1) langweiliger als (3), weil bei (1) *offensichtlich* links und rechts dasselbe steht: Der Sachverhalt wird beide Male durch dieselbe Formel beschrieben. Bei (3) hingegen muss man ein bisschen nachdenken, um zu sehen, dass die Konklusion dasselbe besagt wie die Prämisse. Bei Schluss (2) auch, aber die nötige Überlegung ist simpler.

In manchen philosophischen Modellen wird davon ausgegangen, dass die Überzeugungssysteme von rationalen Subjekten deduktiv abgeschlossen sind, d.h. einfach ausgedrückt: dass wir, wenn wir einen Satz glauben, auch automatisch alles glauben, was aus diesem Satz logisch folgt. Insbesondere glauben wir dann automatisch alle Tautologien. Wenn dem so wäre, dann würden wir in der Tat keinen Bedarf für logische Schlüsse haben, und keine Tautologie wäre uns neu.

In Wirklichkeit ist das natürlich eine starke Idealisierung. Unsere Überzeugungen sind letztlich in unseren Gehirnen gespeichert, also irgendwie in endlichen physikalischen Systemen realisiert. Diejenigen unserer Überzeugungen, die uns bewusst sind, können wir meist einigermaßen leicht in die Form von Sätzen bringen, etwa um sie zu äußern. Teilweise denken wir vielleicht auch in Bildern; aber vieles Nachdenken über Sachverhalte kann man sich, ohne die Dinge allzu sehr zu verfälschen, in der Form vorstellen, dass wir Sätze im Kopf manipulieren, die diese Sachverhalte beschreiben. Viele unserer Überzeugungen sind uns also mehr oder weniger in Form von Sätzen ‚gegeben'; wir glauben dies und jenes sozusagen in einer bestimmten Form.

Dass uns eine Überzeugung z.B. in Form eines Satzes der Gestalt $p \rightarrow \neg q$ gegeben ist – dass wir sie durch einen solchen Satz *repräsentieren* –, heißt aber nicht, dass wir sie automatisch auch in Form jedes dazu logisch äquivalenten Satzes repräsentieren, geschweige denn, dass wir auch die unendlich vielen daraus logisch folgenden Sätze als Repräsentationen haben. Von einem Satz zu einem äquivalenten Satz oder zu einer logischen Konsequenz überzugehen, kostet immer ein wenig kognitiven Aufwand; umso mehr, je komplizierter der Übergang ist (gemessen daran, wieviele für uns ‚natürliche', einfache logische Schlussschritte nötig sind). Wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf einen solchen Satz richten, dann verfolgen wir (mit sinkendem Grad von Aufmerksamkeit bzw. Bewusstheit) vielleicht ein paar einfache Schritte weit, was dieser Satz impliziert, betrachten vielleicht seine Verbindungen zu ein paar anderen Sätzen, die uns auch gerade beschäftigen oder sich wegen inhaltlicher Zusammenhänge aufdrängen. Je nachdem, wie wichtig uns die behandelten Fragen sind, strengen wir uns mal mehr, mal weniger an. Aber wir gehen dabei des Aufwands wegen nie sehr weit, und sicher nicht unendlich weit.

Verschiedene Sätze können nun in unterschiedlichen Situationen unterschiedlich brauchbare Repräsentationen desselben Sachverhalts sein. Unter den logisch äquivalenten Repräsentationen eines Sachverhalts oder einer seiner Konsequenzen sind meist diejenigen Sätze für ein Subjekt besser brauchbar, die übersichtlicher oder leichter in Handlungen umsetzbar sind. „Wenn du getrunken hast, dann solltest du nicht Auto fahren" ist kognitiv leichter handhabbar als „Wenn es nicht der Fall ist, dass du nicht Auto fahren solltest, dann hast du nicht getrunken". Elegante, eingängige, kompakte, übersichtliche Formulierungen sind meist brauchbarer als verworrene, sperrige, lange.

Hier kann es nützlich sein, den einen oder anderen logischen Schluss zu beherrschen. Um das besser verdeutlichen zu können, sollten wir aber zuerst zwischen

Sätzen und ihren logischen Formen unterscheiden. Der Satz „Otto ist ein Pinscher, und nicht alle Pinscher sind harmlos" hat z. B. die logischen Formen $p \wedge q$, $p \wedge \neg r$ und $Po \wedge \neg\forall x\,(Px \rightarrow Hx)$. Logische Formen von Sätzen können (wie hier geschehen) durch Formeln dargestellt werden. Eine Formel φ stellt eine logische Form eines Satzes S dar, wenn man S aus φ erhalten kann, indem man geeignete umgangssprachliche Ausdrücke für die nicht-logischen Zeichen in φ einsetzt.

Jetzt kann man unterscheiden zwischen dem Wissen tautologischer Formeln und dem tautologischer Sätze.[3] Die Tautologie $p \vee \neg p$ zu wissen kann nach dem Vorhergegangenen schlecht bedeuten, jeden Satz der Gestalt $p \vee \neg p$ zu wissen. Vielmehr muss es heißen, dass man ‚abstrakt' weiß, dass jeder Satz dieser Gestalt wahr ist. Dieses Wissen kann man dann in konkreten Fällen nutzen, indem man auf die Wahrheit eines bestimmten Satzes schließt, bei dem man erkannt hat (oder ihn so konstruiert hat), dass er diese Gestalt besitzt.

Analoges kann man für Schlüsse sagen. Wenn ich den ‚formalen' Schluss

$$p \rightarrow \neg q \;\models\; q \rightarrow \neg p$$

beherrsche, heißt das noch lange nicht, dass ich bei jeder meiner Überzeugungen, die die Gestalt $p \rightarrow \neg q$ hat (die ich ‚in der Gestalt $p \rightarrow \neg q$' habe), automatisch auch die zugehörige Substitutionsinstanz von $q \rightarrow \neg p$ glaube. Vielmehr bedeutet es, dass ich ‚abstrakt' weiß, dass für jeden wahren Satz der Gestalt $p \rightarrow \neg q$ auch der zugehörige $(q \rightarrow \neg p)$-Satz wahr ist. Wenn mir dann bei einem bestimmten Satz, den ich glaube, auffällt, dass er die Gestalt $p \rightarrow \neg q$ hat, dann kann ich dank des Schlussschemas erkennen,[4] dass auch das zugehörige $q \rightarrow \neg p$ wahr ist. Mit anderen Worten: Das Wissen um die Gültigkeit des ‚formalen' Schlusses erlaubt mir, in konkreten Fällen einen Sachverhalt, den ich in der Form $p \rightarrow \neg q$ kenne, auch in der Form $q \rightarrow \neg p$ einzusehen.

Vielleicht denkt jetzt jemand: „Das ist aber doch klar. Wer glaubt, dass Otto nicht in der Küche ist, wenn er fernsieht, der muss den Satz ‚Wenn Otto fernsieht, dann ist Otto nicht in der Küche' für wahr halten. Das heißt insbesondere, dass er diesen Satz *versteht*; aber dann glaubt er doch zwangsläufig auch, dass Otto nicht fernsieht, wenn er in der Küche ist. Wer die Prämisse des Schlusses glaubt und versteht, der glaubt automatisch auch die Konklusion." Der Anschein, dass die Konklusion eines logischen Schlusses angesichts der Prämisse(n) stets offensichtlich ist, trügt aber; er entsteht aufgrund der Einfachheit des Beispiels.

Logisches Wissen ist kognitives Werkzeug. Wenn ich schon weiß, dass ein bestimmter abstrakter Schluss gültig ist, dann kann ich in konkreten Fällen von geeigneten Prämissensätzen zum zugehörigen Konklusionssatz übergehen, *ohne* jedes Mal von Neuem die Überlegungen durchführen zu müssen, die in abstrakter Form nötig sind, um die Gültigkeit des Schlusses einzusehen. Das kann eine große Arbeitsersparnis sein, zumal das *Finden* einer geeigneten Herleitung ja auch Mühe und Geschick erfordert. Das Wissen um den abstrakten Schluss gibt mir ein Werkzeug an die Hand, das ich dann auf konkrete Sätze von geeigneter Gestalt anwenden kann.

Man kann solches Wissen auch mit einer Abkürzung vergleichen, die mir erlaubt, mich bequemer zwischen Sätzen (statt zwischen Orten) zu bewegen. Es ist wie eine Subroutine oder ein Makro beim Programmieren: Wenn ich im selben Programm viele Male Mittelwerte von Zahlenpaaren berechnen lassen muss, dann spart es Schreibarbeit und Speicherplatz und schafft Übersichtlichkeit, wenn ich am Anfang des

[3] Ich verwende „Satz" jetzt nur noch für Sätze der normalen Sprache, nicht für ‚Sätze' in formalen Sprachen wie denen der Logik.

[4] Eventuell irrigerweise: wenn ich schon den ursprünglichen Satz irrigerweise glaube.

Programms einmal die Funktion (den Makro) *mittelwert* definiere und später nur noch diese Abkürzung verwende. Dies gilt umso mehr für kompliziertere Algorithmen.

Aber ich weiß doch nach dem Ziehen eines Schlusses auch nicht besser als vorher, was der Fall ist und was nicht! Wie kann der Übergang zur Konklusion einen Informationsgewinn mit sich bringen? – Ich weiß nach dem Übergang vielleicht nicht mehr darüber, was der Fall ist, aber das, was ich weiß, weiß ich u. U. in einer besseren *Form*.

Aber Tautologien sind doch nur isolierte Formeln oder Sätze: Sie erlauben mir keine solchen Übergänge. Wozu ist es dann gut, die zu wissen? – Wissen um Tautologien (und ebenso um logische Falschheiten) erlaubt mir zwar keine neuen Schlüsse, aber es vereinfacht die alten. Der Nutzen von Tautologie-Wissen kommt wohl beim alltäglichen Nachdenken und selbst bei informellen wissenschaftlichen Argumentationen kaum zur Geltung. Bei wissenschaftlichen Argumentationen, die sich formaler, mathematischer Methoden bedienen, tritt jedoch häufig die Situation auf, dass beim logischen Umformen und Schließen Tautologien auftauchen. Wer diese als Tautologien erkennen kann (und noch über ein wenig mehr logisches Handwerkszeug verfügt), der kann Sätze und Formeln bequem vereinfachen. Wenn ich z. B. bereits festgestellt habe, dass ich die von mir angestrebte Konklusion ψ aus den Prämissen φ und τ erhalten kann, und mir weiter bekannt ist, dass τ eine Tautologie ist, dann muss ich mich nur noch darum kümmern, φ zu beweisen oder zu begründen, um mein Argument für ψ abzuschließen. Tautologie-Wissen erleichtert auch viele logische Umformungen: Wenn τ eine Tautologie ist, dann kann ich etwa $\tau \rightarrow \varphi$ und $\tau \wedge \varphi$ stets durch φ ersetzen, und umgekehrt. Ähnlich nützlich ist Wissen um logische Falschheiten: Wenn κ eine Kontradiktion ist, dann kann ich $\varphi \rightarrow \kappa$ durch $\neg\varphi$ ersetzen und $\varphi \vee \kappa$ durch φ, und umgekehrt. Und wenn ich aus bestimmten Prämissen κ hergeleitet habe, dann weiß ich, dass mindestens eine meiner Prämissen falsch ist.

Aber all das – könnte jemand einwenden – geht doch eben nur, weil eine Tautologie keinen Gehalt hat, weil sie nichts ausschließt, bzw. weil Kontradiktionen in dem Sinne ‚keinen Gehalt' haben, als sie *alles* ausschließen. Sind das nicht gerade Belege für den mangelnden Informationsgehalt logischen Wissens? – Ja und nein. Man kann die Situation am besten anhand von Logeleien, logischen Denksportaufgaben, verdeutlichen. Bei einer Logelei wird der Leserin kurz eine fiktive Situation geschildert und eine Reihe von Sätzen an die Hand gegeben, die weitere Informationen über die Situation enthalten. Dann muss die Leserin, sagen wir: Anna, eine Frage über diese Situation beantworten. Anna besitzt in Form der Sätze sämtliche Information, die nötig ist, um die Frage zu beantworten. Wenn Anna logisch allwissend wäre (d. h. wenn ihre Überzeugungen unter logischer Folgerung abgeschlossen wären), dann könnte sie die Antwort einfach aus dem Ärmel schütteln. Logeleien wären für sie witzlos. Aber als Normalsterbliche muss sie viel Zeit und Gehirnschmalz aufwenden, um auf die Lösung zu kommen. Sie hat zwar in gewissem Sinne alle notwendige Information, aber dennoch weiß sie die Antwort zunächst nicht, weil sie die Information in einer außerordentlich unpraktischen Form hat. Anna weiß sozusagen nicht, was sie da alles weiß. Logisches Wissen kann ihr helfen, das herauszufinden.

Logisches Wissen ist also nicht die übliche Sorte Wissen über die Welt: Es kann uns nicht sagen, wo wir etwa das Portemonnaie liegen gelassen haben – es sei denn, wir hätten diese Information schon irgendwo in versteckter Form! Logisches Wissen kann uns etwas über unser *Wissen* sagen, und unser Wissen ist genauso Teil der Welt wie unser Portemonnaie. In diesem Sinne ist Schluss (3) auf S. 1 informativer als (1) und (2): Er gibt uns nützlichere Information über unser Wissen.

Warum werden dann in Logik-Einführungen Schlüsse wie $\varphi \models \varphi$ und $\varphi \models \varphi \vee \varphi$

erwähnt, die doch offensichtlich zu wenig oder gar nichts nütze sind? – Solches Wissen ist in der Tat für den normalen Logik-Anwender kaum brauchbar; aber es ist für denjenigen wichtig, der sich mit der *Meta*logik einer Folgerungsbeziehung $\models$ beschäftigt, der also Logik nicht nur benutzt, sondern auch untersucht.

Charakterisiert man die Bedeutung eines Satzes im Rahmen der Mögliche-Welten-Semantik als die Menge derjenigen Welten, in denen der Satz gilt, so gehen dabei die Unterschiede zwischen logisch äquivalenten Sätzen verloren, weil diese in genau denselben Welten gelten. Auch glaubt man bei dieser Darstellung sämtliche Tautologien und glaubt mit einem Satz stets auch alle seine logischen Konsequenzen; d. h. die Mögliche-Welten-Semantik unterstellt logische Allwissenheit. In diesen Hinsichten wird sie der Beschaffenheit menschlicher Überzeugungszustände nicht gerecht.

Ganz analoge Bemerkungen wie hier über logisches Wissen kann man über mathematisches Wissen machen. Der Unterschied scheint darin zu bestehen, dass die Logik keinerlei Einschränkungen für die in den Sätzen vorkommenden Begriffe vorsieht, während die Mathematik je nach Teilgebiet unterschiedliche strukturelle Anforderungen (ausgedrückt durch Axiome) an die Grundbegriffe stellt.

Literatur

Frege, Gottlob. 1892. "Über Sinn und Bedeutung." *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* N. F. 100:25–50. Nachgedruckt in Frege 1962, 40–65.

———. 1962. *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*. 5. Auflage 1980. Kleine Vandenhoeck-Reihe 1144. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. Herausgegeben von Günther Patzig.

Hoyningen-Huene, Paul. 1998. *Formale Logik: Eine philosophische Einführung*. Stuttgart: Reclam.

Wittgenstein, Ludwig. 1984. *Tractatus logico-philosophicus. Tagebücher 1914–1916. Philosophische Untersuchungen* (Werkausgabe Bd. 1). 10. Auflage 1995. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 501. Frankfurt am Main: Suhrkamp.