数学哲学*

莱昂·霍斯顿 著
张莉 译

【摘 要】数学哲学是数学与哲学的交叉领域。数学研究对象的特殊性给哲学家们提出了与传统知识论和形而上学密切相关的问题:哲学家们追问着"数的本质是什么?""如果数是抽象实体,那么我们如何能够获得它们的知识?"等哲学问题。广义上的数理逻辑,也就是涵盖了集合论、证明论、模型论与可计算理论这些分支的数理逻辑的发展,使得用数学方法探讨不同哲学假设带来的不同数学后果成为可能。借此,我们能更加清晰地看到数学柏拉图主义、直觉主义、数学唯名论等流派的发展动机与局限,对机器证明等问题也有了深入理解的可能性。

【关键词】柏拉图主义 逻辑主义 直觉主义 数学唯名论 结构主义

---

* 译自 Leon Horsten, "Philosophy of Mathematics," Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition), URL=https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/philosophy-mathematics/。《数学哲学》原文并无摘要与关键词。此处的摘要与关键词为译者根据原文内容撰写、择取而成。

如果数学被看成一门科学，那么数学哲学应被看成科学哲学的一个分支，并因此与物理学哲学、生物学哲学等学科并列。然而，由于其研究对象(的特殊性)，数学哲学在科学哲学中占据了一个特殊位置。自然科学的研究对象是处在时间与空间中的实体，但对数学所研究的对象来说，它们是否同样如此并不清楚。此外，数学的研究方法与自然科学的研究方法有明显不同。自然科学通过归纳法得到一般知识，数学知识看上去是用另一种方法得到的：也就是从基本原则出发的演绎。数学知识与自然科学知识的状态看起来也并不相同。相较于数学理论，自然科学理论看上去更不确定，对修正也更加开放。出于这些原因，数学给哲学提出了一类非常独特的问题。相应地，哲学家们对与数学相关的本体论和知识论问题也已经给予特殊关注。

一、数学哲学、逻辑以及数学基础

一方面，数学哲学关注与形而上学以及知识论的中心问题密切相关的问题。乍一看，数学似乎是在研究抽象实体(abstract entities)。这让人们好奇：数学实体(mathematical entities)的本质在于什么，以及我们如何能够拥有关于数学实体的知识？若这些问题被视为不可解决，那么，人们可能会试着探讨数学对象是否以某种方式而终究属于具体世界(the concrete world)。

另一方面，事实已经证明，在某种程度上运用数学方法解决有关数学的哲学问题是可行的。人们是在数理逻辑被视为包含证明论、模型论、集合论以及可计算理论这些子领域的背景下取得了这一成就。因而在20世纪，人们见证了对一些关于数学本质的理论及其后承的数学研究，而那些关于数学本质的理论在根子上是哲学理论。

当职业数学家关心自身学科的基础，人们就称他们在做基础研究。当职业哲学家研究有关数学的哲学问题，人们就说他们是在为数学哲学做贡献。当然，数学哲学与数学基础之间的区别是模糊的，而且在有关数学本质的问题上，致力于此的哲学家和数学家们之间的互动越多越好。

二、四大流派

19世纪哲学与科学的总体倾向是经验性的：有关数学的理性主义理论，其柏拉图主义方面正飞速失去支持。尤其是，曾被高度推崇的对“理念”(idea)的理性直观(rational intuition)亦被视为可疑。因此，确切地阐述一个不含有柏拉

图主义因素的数学哲学理论成为当时的挑战之一。在 20 世纪的前几十年，三种对数学的非柏拉图主义阐释（accounts）得到了发展：逻辑主义、形式主义和直觉主义。20 世纪之初也萌发了第四种纲领：直谓主义（predicativism）。由于偶然的历史环境，这一纲领的真实潜力直到 1960 年代才逐步得到显示。尽管如此，在已经被大多数标准的当代数学哲学导论——比如《思考数学》[①]和《数学哲学》[②]讨论的传统的三大流派之外，它仍然值得一席之地。

（一）逻辑主义

逻辑主义方案的主要内容是尝试将数学还原为逻辑。由于逻辑通常被假定为在本体论问题上是中立的，因而这一方案看起来与 20 世纪初的反柏拉图主义氛围十分契合。

“数学是伪装的逻辑”这一想法可以追溯至莱布尼茨。但只有在 19 世纪戴德金（Julius Wihelm Richard Dedekind）和皮亚诺（Giuseppe Peano）明确表述核心数学理论的基本原则（principles），以及弗雷格发现逻辑的原则之后，人们才开始严肃而细致地尝试执行逻辑主义纲领。

在大半职业生涯中，弗雷格都致力于表明数学如何能被还原为逻辑。[③] 他成功地从一个二阶逻辑系统的基本法则中推出了（二阶）皮亚诺算术的原则。他的推导毫无问题。然而，他所依赖的一条原则却被证明不是逻辑原则。更糟糕的是，这条原则站不住脚。出问题的原则就是弗雷格的基本法则五：

$$\{x \mid Fx\} = \{x \mid Gx\} \quad \text{当且仅当} \ \forall x(Fx \equiv Gx),$$

用自然语言说就是：性质下的外延与性质 G 的外延相同，当且仅当是 F 的事物都是 G，并且是 G 的事物也都是 F。

在一封著名的给弗雷格的信中，罗素表明弗雷格的基本法则五必然导致矛盾。[④] 这个论证已经被称作罗素悖论（见 2.4 节）。

罗素后来尝试用另一种方法将数学还原为逻辑。从弗雷格基本法则五可以推出，相应于数学实体的每一种性质，存在一个数学实体的类（class），该类中

① Stuart Shapiro, *Thinking about Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 2000).

② Øystein Linnebo, *Philosophy of Mathematics* (Princeton: Princeton University Press, 2017).

③ Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic: A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number* (1884), trans. John Austin (Evanston: Northwestern University Press, 1980).

④ Bertrand Russell, "Letter to Frege," (1902), in Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic (1879 – 1931)* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967), pp.124 – 125.

的每个成员都具有这一性质。这一结论显然过强,因为它正是导致罗素悖论的结论。因而罗素假定,只有已经被证明存在的数学对象的性质才给出(determine)类。那些隐性地指向实际不存在的类,又意图给出这些类的谓词,并不给出任何类。因而,我们得到了一个类型化的性质的结构:基础对象(ground objects)的性质,基础对象和基础对象的类的性质,如此等等。这种类型化的性质的结构给出了一个分层的数学对象的宇宙:从基础对象开始,进展到基础对象的类,再到基础对象和基础对象的类所构成的类,等等。

不幸的是,罗素发现他的类型化逻辑的原则不足以演绎出甚至是最基本的算术法则。除了别的内容,他还要将"存在一个基础对象的无穷的集(collection)"作为一条基本原则。然而这条原则很难被视为逻辑原则。因而将数学还原为逻辑的第二次尝试也逐渐中止了。

事情被搁置了五十多年。1983年,克里斯平·赖特(Crispin Wright)有关弗雷格的自然数理论的著作得以出版。⑤ 在其中,赖特赋予了逻辑主义方案新生命。他发现可以将弗雷格对二阶皮亚诺算术的推导分为两个阶段。在第一阶段,弗雷格使用不一致的基本法则五推出了人们所说的休谟原则:

> 性质F外延的数=性质G外延的数,当且仅当F的外延与G的外延等势(The number of the Fs=the number of the Gs if and only if $F\approx G$)。

其中,具有F性质的事物的集合与具有G性质的事物的集合等势意味着具有性质F的事物的集合与具有性质G的事物的集合之间存在一一对应关系(这种一一对应关系可以在二阶逻辑中得到表达)。随之,在第二阶段,二阶皮亚诺算术的原则可以从休谟原则和已被接受的二阶逻辑的原则中推出。尤其是,在第二阶段的推导中并不需要用到基本法则五。赖特进一步猜想,不同于弗雷格的基本法则五,休谟原则是一致的。乔治·布洛斯(George Boolos)和其他人观察到休谟原则的确一致。⑥ 赖特继续宣称说,休谟原则能够被当成一条逻辑真理。若的确如此,那么二阶皮亚诺算术就可以还原为逻辑。因此,一个新形式的逻

⑤ Crispin Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects* (Scots Philosophical Monographs, vol.2) (Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983).

⑥ George Boolos, "The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic" (1987), in George Boolos, *Logic, Logic, and Logic* (Cambridge: Harvard University Press, 1998), pp.183-201.

辑主义诞生了;如今这一观点就是人们所说的新逻辑主义(*neo-logicism*)。[⑦]

当今大多数数学哲学家对“休谟原则是逻辑原则”保持怀疑。事实上,在最近几年,甚至赖特都试图修正这一断言——他现在论证说休谟原则是对我们的数的概念的分析,并且因此至少是一条理性的法则(law of reason)。

赖特的工作已经将数学哲学家们的注意力吸引到以基本法则五和休谟原则为例的一类原则上。人们称这些原则为抽象原则(*abstraction principles*)。目前,数学哲学家们尝试构造有关抽象原则的一般理论,并由此说明哪些抽象原则是可接受的,哪些不是以及原因是什么。[⑧] 同样,在二阶逻辑弱化版本的语境中,“弗雷格的基本法则五是一致的”也得到证实。但这些较弱的背景理论仅允许从基本法则五中推出非常弱的算术理论。[⑨]

(二)直觉主义

直觉主义起源于数学家布劳威尔(L.E.J. Brouwer)的工作[⑩],它是在对“对象是什么”的康德主义看法的启示下诞生的。[⑪] 根据直觉主义,数学本质上是一种构造活动。自然数是精神构造(mental constrauctions),实数是精神构造,证明和定理是精神构造,数学含义(mathematical meaning)是一种精神构造……数学构造由理想数学家制造(the *ideal* mathematician),(理想数学家)就是对偶然的、受物理局限的、活生生的数学家的抽象。但即使是理想数学家也是有穷存在物。她永远不能完成无穷的构造,即使她能完成它的任意大的有穷初始部分。这导致直觉主义坚定地拒绝实无穷(the actual infinite)或完成的无穷(the completed infinite):只有潜在无穷的集(collections)能在构造活动中被给定(given)。一个基本的例子是个体自然数在时间中的相继构造。

从这些有关数学本质的一般考虑出发,基于人类的心智条件[⑫],直觉主义者推出了一个逻辑和数学中的修正主义立场。他们发现非构造性的存在证明不

---

⑦ Bob Hale & Crispin Wright, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 2001).

⑧ Alan Weir, "Neo-Fregeanism: An Embarrassment of Riches," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.44(2003), pp.13-48. Kit Fine, *The Limits of Abstraction* (Oxford: Oxford University Press, 2002).

⑨ John Burgess, *Fixing Frege* (Princeton: Princeton University Press, 2005).

⑩ Mark van Atten, *On Brouwer* (London: Wadsworth, 2004).

⑪ Charles Parsons, *Mathematical Thought and Its Objects* (Cambridge: Cambridge University Press, 2008).

⑫ Adrian Moore, *The Infinite* (New York: Routledge, 2nd edition, 2001).

可接受。所谓非构造性的存在证明指的是:致力于证明具有特定性质的数学对象的存在,但甚至没有隐性地包含任何生成这种实体的例子的方法。直觉主义将非构造性的存在证明视为“神学的”和“形而上学”的而加以拒绝。这些非构造性存在证明的特色性特征是,它们实质地运用了排中律:

$$\phi \vee \neg \phi$$

或者它的一个等价原则,例如双重否定原则:

$$\neg \neg \phi \rightarrow \phi。$$

在经典逻辑中这些原则是有效的。直觉主义数学所用的逻辑是通过将排中律(及其等价原则)从经典逻辑中移除而得到的。这当然会导致对数学知识的修正。例如,初等算术的经典理论皮亚诺算术就无法再被接受。而一个不含排中律的直觉主义算术理论(人们称其为海廷算术)也由此被提出。尽管直觉主义初等算术弱于经典初等算术,它们的总体差别并没有那么大。存在一个简单的句法翻译,它可以将所有算术的经典定理翻译为直觉主义可证的定理。

在20世纪的最初几十年,数学共同体的一部分对直觉主义对经典数学的批判及其所提出的替代方案抱有同情。但当在高阶数学领域内直觉主义替代方案变得与经典理论十分不同这一点变得清楚以后,情况发生了改变。例如,直觉主义数学分析是一个十分复杂的理论,它与传统的数学分析十分不同。这降低了数学共同体对直觉主义方案的热情。然而,布劳威尔的追随者们继续发展着直觉主义数学直到今日。[13]

(三)形式主义

大卫·希尔伯特与直觉主义者都认为,在某种意义上自然数在数学中是基本的。但不同于直觉主义者,希尔伯特不认为自然数是精神构造。相反,他论证说自然数可以被视为符号(*symbols*)。严格来说,符号是抽象对象。但对符号而言,能够被具体化为具体对象(be embodied by concrete objects)仍然是本质性的,因此我们可以称它们为准具体对象(*quasi-concrete* objects)。[14] 或许物理实体能够扮演自然数的角色。例如,我们或许可以将一个具体的具有|形式的墨

[13] Anne Troelstr and Dirk van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction (Volumes I and II)* (Amsterdam: North-Holland, 1988).

[14] Charles Parsons, *Mathematical Thought and Its Objects* (Cambridge: Cambridge University Press, 2008).

水轨迹视为数 0，将一个具体的具有 || 形式的墨水轨迹视为数 1，如此等等。（但是）希尔伯特认为，最乐观地看，是否能用一种类似的、直接并且可能甚至更加具体的方式解释高阶数学，这一点也十分可疑。

不同于直觉主义者，对于现存的数学知识希尔伯特没有打算采用修正主义立场。相反，针对高阶数学，他采用了一个工具主义立场。他认为高阶数学仅仅是一个形式游戏。高阶数学中的陈述是未经解释（uninterpreted）的符号串（uninterpreted strings of symbols）。证明这些陈述，相当于在一个游戏中根据固定规则操控符号。在希尔伯特看来，“高阶数学之游戏”的重点即在于证明初等算术中的陈述——这些陈述的确具有直接的解释（interpretation）。[15]

希尔伯特认为，不可能存在对经典皮亚诺算术可靠性的合理质疑——或者至少对其被称为原始递归算术的子系统的可靠性而言如此。[16] 并且他认为，每一个可以通过高阶数学而被迂回地加以证明的算术陈述，都能在皮亚诺算术中直接得到证明。事实上，他强烈地觉得每一个初等算术问题都能基于皮亚诺算术公理而判定。当然，在算术中解决算术问题在有些案例中是实践上不可能的。数学的历史已经表明，通过高阶数学制造“迂回”有时会带来对算术陈述这样的证明：相比于任何对该陈述的纯粹算术证明，它都更短，提供的洞见也更丰富。

希尔伯特意识到，尽管多少有些不清楚，他所坚信的一些内容实际上可以视为数学猜想。一个高阶数学的或初等算术的形式系统中的证明是一个有穷的组合性对象，通过编码（modulo coding），其可以被视为自然数。但在 1920 年代，将证明编码为自然数的细节还没有得到完全的理解。

从形式主义角度看，对高阶数学形式系统的最低要求是它们至少是一致的。否则，初等算术的每每一陈述都能在这些系统中得到证明。希尔伯特还认为（尽管同样不太清楚），一个高阶数学系统的一致性导致这个系统至少是部分算术可靠（partially arithmetically sound）。因此，希尔伯特和他的学生们着手证明例如“数学分析的标准假设是一致的”这样的陈述。当然，这类陈述必须在数学的一个“安全”的部分，例如初等算术中加以证明。否则，这些证明并不会增

---

⑮ David Hilbert, “On the Infinite” (1925), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.183 - 201.

⑯ William Tait, “Finitism” (1981), reprinted in William Tait, *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History* (Oxford: Oxford University Press, 2005), pp.21 -42.

加我们对数学分析一致性的确信程度。并且幸运的是,原则上做到这一点看起来是可能的,因为在最后的分析中,再次通过编码,一致性陈述是算术陈述。因此,准确地说,希尔伯特和他的学生们着手在经典皮亚诺算术中证明,例如,数学分析公理的一致性。这一方案就是所谓的希尔伯特纲领(Hilbert's program)。[17] 结果显示,该计划比他们曾经预期的更难。事实上,他们甚至没有在皮亚诺算术中成功证明过皮亚诺算术公理的一致性。

后来,库特·哥德尔(Kurt Gödel)证明存在算术陈述,其在皮亚诺算术中不可判定。[18] 这就是所谓哥德尔第一不完备性定理。对希尔伯特纲领来说,这不是一个好兆头,但它没有否定高阶数学一致性陈述不属于这些不可判定陈述的可能性。不幸的是,哥德尔后来迅速意识到,除非(天理难容!)皮亚诺算术不一致,皮亚诺算术的一致性独立于皮亚诺算术。这就是哥德尔第二不完备性定理。事实证明,哥德尔不完备性定理一般地适用于所有足够强但一致的递归可公理化理论。总的来看,它们导致了希尔伯特纲领的失败。结论则是高阶数学无法用纯粹工具主义的方式解释。高阶数学可以证明如一致性陈述等算术语句,但这些不是皮亚诺算术所能做到的。

所有这些都并未宣告形式主义的终结。即使面临着不完备性定理,坚持数学是形式系统的科学仍然融贯。

库里(Haskell Curry)提出过这种观点的一个版本。[19] 从这一观点来看,数学由一个形式系统的集构成,这些形式系统没有解释或者研究对象(subject matter)。(库里认为元数学是一个例外。)相对于一个形式系统,人们可以说一个陈述是真的当且仅当它在该系统中可推导。但在一个基本的层面上,所有数学系统都同等(有效)。能让我们偏好某系统甚于另一系统的至多只有实践上的原因。不一致的系统可以证明所有陈述并且因此十分无用。所以当一个系统被发现不一致,它就必须得到修正。这也是从哥德尔不完备性定理,也就是一个充分强的一致系统不能证明自身的一致性得出的教益。

---

⑰ Richard Zach, "Hilbert's Program Then and Now" (2007), in D. Jacquette (ed.), *Philosophy of Logic* (*Handbook of the Philosophy of Science*, *Volume 5*) (Amsterdam: Elsevier, 2007), pp.411–447.

⑱ Kurt Gödel, "On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I" (1931), in van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*: *A Source Book in Mathematical Logic* (*1879–1931*) (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967), pp.596–616.

⑲ Haskell Curry, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics* (Amsterdam: North-Holland, 1958).

对库里的形式主义立场，有一个典范性的反对意见。数学家们事实上并没有对所有明显一致的形式系统一视同仁。他们中的大多数也不愿承认，相较于能推出其否定句的系统，他们对那些可以从中推导出表达皮亚诺算术一致性的算术语句的算术系统的偏好最终可以用纯粹实践术语说明。许多数学家们希望坚持这一点：已被发觉的特定形式系统的正确性（不正确性）必须最终由它们正确（不正确）地描述了特定研究对象的事实所说明。

德雷弗森（Michael Detlefsen）已经强调，不完备性定理并未排除这一点：在实践上被用于解决数学家们感兴趣的算术问题的高阶数学的一部分，其一致性能够被算术地确立。[20] 在这种意义上，即使希尔伯特在所有高阶数学方面的工具主义立场最终不可取，有些东西或许还是能从这场大火中保留下来。

艾萨克森（Isaacson）做出了另一个试图解救部分希尔伯特纲领的尝试。[21] 他为“在某种意义上，皮亚诺算术可能最终是完备的”这一观点做了辩护。[22] 他论证说，皮亚诺算术中不可判定的真语句最终只能由更高阶的概念（higher-order concepts）加以证明。例如，皮亚诺算术的一致性能够通过直至超穷序数的归纳法（induction up to a transfinite ordinal number）而加以证明。[23] 但是，序数的观念（the notion of an ordinal number）却是一个集合论的因而是一个非算术的概念（concept）。如果仅有的证明算术一致性的方法实质地用到有理由说是属于高阶数学的观念，那么，尽管我们可以用皮亚诺算术语言表达算术一致性，算术一致性却是一个非算术问题。对此加以概括，人们就可以怀疑，“每一个算术问题都可以基于皮亚诺算术公理而判定”这一希尔伯特猜想是否仍然并不为真。

（四）直谓主义

正如之前所提到的，人们通常不认为直谓主义是一个流派。但仅仅出于偶然原因，直谓主义才在二战前没有发展得像其他流派一样显赫。

---

[20] Michael Detlefsen, *Hilbert's Program* (Dordrecht: Reidel, 1986).

[21] Daniel Isaacson, "Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts" (1987), in The Paris Logic Group (ed.), *Logic Colloquium '85* (Amsterdam: North-Holland, 1987), pp.147 – 169.

[22] Ibid.

[23] Gerhard Gentzen, "Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie," in Heinrich Scholz (ed.), *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* (Neue Folge/Heft 4) (Leipzig: Hirzel, 1938).

直谓主义起源于罗素的工作。在庞加莱的启发下,罗素对罗素悖论做出了如下诊断。罗素悖论的论证定义了集 C(the collection C),其成员是所有满足 $\neg x \in x$ 的数学实体。论证进一步追问了 C 自身是否满足这一条件,并由此推出了矛盾。

庞加莱—罗素对这一论证的诊断认为,这一定义没有挑出任何集:不可能通过一个隐性地指向 S 自身的条件定义集 S。这就是所谓恶性循环原则(*the vicious circle principle*)。违背恶性循环原则的定义被称为非直谓的(*impredicative*)。对一个集的完善的定义应当只指向那些独立于被定义的集而存在的实体。这样的定义被称作直谓的(*predicative*)。正如哥德尔后来所指出的,一个柏拉图主义者会发现这条推理路线不令人信服。如果数学集的存在独立于定义行为,那么,为什么不能有只能非直谓地定义的集就并非直接了然。[24]

所有这些都促使罗素发展了简单的(simple)和分支的(ramified)类型论,罗素通过添加一些句法限制,使得非直谓定义成为非合式(ill-formed)的。在简单类型论中,起定义作用的公式中的自由变元统辖待定义的集不是其成员的那些实体。分支类型论又额外要求起定义作用的公式中的约束变元的辖域没有涵盖待定义的集。在 2.1 节中我们已经指出,不能把罗素的类型论视为一个从数学到逻辑的还原。但甚至抛开那一点不谈,人们早就发现,尤其是在分支类型论中,形式化日常的数学论证已经变得十分累赘。

当罗素转向分析哲学的其他领域之后,赫尔曼·魏尔(Hermann Weyl)继承了直谓主义的事业。[25] 与庞加莱一样,魏尔不像罗素那样渴望将数学还原为逻辑。并且从一开始,他就认为在实践上,在一个分支类型论里面工作是不可能的。魏尔发展了一个在一定意义上介于直觉主义和柏拉图主义的哲学立场。他认为自然数的集(the collection of natural numbers)是没有问题地被给定的;但自然数的任意子集的概念不是在数学直觉中直接被给定的。只有那些由算术(也就是一阶)谓词决定的子集才被认为直谓地可接受。

一方面,数学分析中的许多标准定义是非直谓的。例如,一个函数在一个集合上的最小闭包通常被定义为在该函数的应用下封闭的所有集合的交集。但是,最小闭包自身也是所有在此函数的运用下封闭的集合中的一个。因此,

---

[24] Kurt Gödel, "Russell's Mathematical Logic" (1944), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.447-469.

[25] Hermann Weyl, *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis* (1918), trans. Stephen Pollard and Thomas Bole (Mineola: Dover, 1994).

这个定义是非直谓的。有赖于此,人们逐渐将注意力从对集合论悖论的关注转移到在主流数学中非直谓性所扮演的角色的关注上。另一方面,魏尔表明,绕过非直谓的观念(impredicative notions)常常是可能的。事实甚至已经表明,19世纪数学分析主流的大部分都能在直谓的基础上得到证明。[26]

1920年代历史中断了。魏尔受到布劳威尔更激进的直觉主义方案的吸引。与此同时,数学家们变得确信由康托尔和策梅洛发展的高度非直谓的超穷集合论不如之前预期地那样深受罗素悖论的威胁。这些因素使得直谓主义衰落到长达几十年的休眠期中。

1960年代,在广义递归论工作(generalised recursion theory)的基础上,所罗门·费弗曼(Solomon Feferman)对直谓主义方案进行了扩张。[27] 他意识到魏尔的策略可以被迭代到超穷(阶段)。同样,那些通过量化魏尔认为直谓可接受的集合而定义的数的集合,应当被算作是直谓可接受的,如此等等。这一过程可以沿着一条序数的路径(ordinal path)加以拓展。如果一个序数代表了(measures)一个自然数的可证良序的长度,它即为直谓的,那么在超穷层次上,直谓序数(*predicative ordinals*)能到达何处,上述序数路径就能到达何处。这一关于直谓数学力度的标准如今已被广为接受,而费弗曼和舒特各自(独立)享有创建它的功劳。费弗曼后来研究了在一个直谓主义的框架中有多少标准的数学分析能够被施行出来。费弗曼和其他人(最主要的是哈维·弗里德曼[Harvey Friedman])的研究表明,从直谓主义的观点看,二十世纪的大部分数学分析都是可接受的。但是,从直谓主义的观点看也很清楚,不是所有一般地被数学共同体接受的当代数学都可接受:超穷集合论即是一例。

三、柏拉图主义

在第二次世界大战前的若干年,在数学哲学中,人们已经针对上述三个反柏拉图主义纲领提出了颇有分量的反驳意见。直谓主义可能是一个例外,但那时它是一个没有辩护者的纲领。这就为对关于数学本质的基于柏拉图主义观点的新兴趣创造了空间。在柏拉图主义的观念(conception)中,数学的研究对

---

[26] Solomon Feferman, Weyl Vindicated: "Das Kontinuum Seventy Years Later" (1988), reprinted in Solomon Feferman, *In the Light of Logic* (New York: Oxford University Press, 1998), pp.249–283.

[27] Solomon Feferman, "Predicativity" (2005), in Stuart Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press, 2007), pp.590–624.

象是抽象实体。

(一)哥德尔的柏拉图主义

在涉及数学对象以及数学概念(mathematical concepts)时,哥德尔是一个柏拉图主义者[28]。但他的柏拉图主义观点比一般数学家的观点精致很多。

哥德尔认为,在合理的有关数学对象和数学概念的理论与合理的有关物理对象和物理性质的理论之间有着强平行性。如同物理对象和性质,数学对象和性质不是人所构造。如同物理对象和性质,数学对象和概念不可被还原为精神实体。数学的对象和概念与物理的对象和概念一样客观。如同物理的对象和性质,人们假设数学的对象和性质也是为了获得关于我们经验的好并且令人满意的理论。事实上,类似于我们对物理对象和性质的知觉关系,通过数学直觉(*mathematical intuition*),我们与数学对象和概念之间保持着准知觉关系(quasi-perceptual relation)。我们对数学对象和概念的知觉可错也能够被纠正。以同样的方式,数学直觉并非万无一失——正如弗雷格的基本法则五的历史所表明的——但它能够被训练也能得到提升。不同于物理对象和性质,数学对象不存在于时间和空间中,数学概念也不在空间和时间中被例示(instantiated)。

我们的数学直觉为数学原则提供了内在证据(*intrinsic evidence*)。几乎我们全部的数学知识都能从策梅洛—弗兰克尔集合论的公理外加选择公理(ZFC)中演绎出来。在哥德尔看来,对这些公理的真我们有不可抗拒的内在证据。但他同样担心,数学直觉可能没有强到能为显著地超出 ZFC 力量的公理提供不可抗拒的证据。

在哥德尔看来,除了内在证据,为数学原则提供外在证据(*extrinsic evidence*)同样是可能的。如果数学原则是成功的,那么,即使我们不能为它们提供直觉性证据,它们也会被当成可能是真的。哥德尔说:“这里成功的涵义是有丰富的尤其是‘可验证’的结果,例如,不借助新的公理即可验证,但借助新公理,其证明将可观地更加简单、更容易发现,并且使得将许多不同的证明收拢为一个证明变得可能[……]可能存在这样的公理,对于它们的可验证结果来说,它们是

[28] Kurt Gödel, “Russell's Mathematical Logic” (1944), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.447-469. Kurt Gödel, “What is Cantor's Continuum Problem?” (1947), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.470-485.

过剩的；但它们使整个领域变得十分清楚，为问题的解决提供了如此有力的工具[……]因而无论它们是否内在地必要，至少在与被良好地确立的物理理论被接受相同的意义上，它们也不得不被接受。”[29]这促使哥德尔去寻求一些新的公理，这些公理能得到外部的激发(motivated)，同时能判定一些如连续统假设这样高度独立于ZFC的问题(见第5.1节)。

哥德尔与希尔伯特同样坚信，所有数学问题都有确定答案。但是数学哲学中的柏拉图主义不应就此被认为承诺接受所有集合论命题都有确定的真值。有些版本的柏拉图主义认为，例如ZFC的所有定理都因确定的集合论事实而为真，但是并不存在集合论事实使得特定的高度独立于ZFC的陈述的真值同样确定。著名的集合论学家保罗·科亨(Paul Cohen)看上去就持有这样的观点。[30]

（二）自然主义与不可或缺性

奎因从方法论的角度对传统哲学提出了批评。他建议用另一种哲学方法取而代之，这就是人们后来所知的自然主义。[31] 根据自然主义，我们最好的理论是我们的科学理论。若我们希望获得像我们知道什么？以及何种实体存在？这类哲学问题所能得到的最佳答案，我们就不应当诉诸传统的知识论和形而上学理论。我们同样应当停止从第一原则出发来从事基本的知识论和形而上学研究。毋宁说，我们应当查询并且分析我们最好的科学理论。它们包含(尽管通常只是隐性地)我们目前对何物存在、我们知道什么以及我们如何获知它们的最佳说明。

普特南将奎因的自然主义立场运用到数学本体论上。[32] 至少从伽利略开始，我们在自然科学中的最佳理论都是借数学而表达的。例如，牛顿的万有引力理论十分依赖经典实数理论。因此，一个对数学实体的本体论承诺就内在地隐含于我们的最佳科学理论中。这条推理路径能够通过诉诸确证整体论的奎因式论题而得到强化。经验证据不会将它的确证力量置于任何个别假设中。

---

[29] Kurt Gödel, “What is Cantor’s Continuum Problem?’ (1947), p.477.

[30] Paul Cohen, “Comments on the Foundations of Set Theory” (1971), in Dana Scott (ed.), *Axiomatic Set Theory* (*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume XIII, Part 1) (American Mathematical Society, 1971), pp.9-15.

[31] Willard V. O. Quine, “Epistemology Naturalized” (1968), in Willard V. O. Quine, *Ontological Relativity and Other Essays* (New York: Columbia University Press, 1969), pp.69-90.

[32] Hilary Putnam, *Philosophy of Logic* (London: George Allen & Unwin, 1972).

相反,经验全局地确证包含个别假设的理论。由于数学是科学理论重要而不可或缺的一部分,它们同样被经验确证。因此,对于数学理论我们也有经验的确证。此外,对我们最好的科学理论而言,数学看起来不可或缺:不使用这些数学词汇,我们如何能够表达它们就变得十分不清楚。因此,自然主义的立场要求我们将数学实体作为我们哲学本体论的一部分而加以接受。这条路径上的论证被称作不可或缺性论证(*indispensability argument*)。[33]

如果表面化地看待我们最佳科学理论中所用到的数学,那么我们似乎就承诺了一种柏拉图主义。但相比于哥德尔的柏拉图主义,这是一种更温和的柏拉图主义。因为看起来,凭借(粗略地)实数上的函数空间(function spaces on the real numbers),自然科学也完全可以应付。而看上去超穷集合论的更高领域和我们在自然科学中最先进的理论似乎也毫无关联。尽管如此,奎因(在有些地方)认为,从自然主义的角度说ZFC所假定的集合是可接受的;我们可以认为它们使自然科学所涉及的数学更加完善。奎因在这一问题上的看法不是所有人都接受。例如,费弗曼论证说,我们目前最好的自然科学理论实质用到的数学理论都直谓地可还原。[34] 麦迪(Penelope Maddy)甚至论证说,数学哲学中的自然主义与一种有关集合的非实在论的看法完美相容。[35]

在奎因哲学中,自然科学是有关数学存在和数学真的最终仲裁人。这使得查尔斯·帕森斯(Charles Parsons)提出了反对意见,因为这个图景使得初等数学的明显性(obviousness)变得有些神秘。[36] 例如,在奎因看来,是否每个自然数都有一个后继最终取决于我们最好的经验理论。然而,事实似乎比奎因的设想更直接。出于相似的精神,麦迪提到,数学家们不会认为在自己的工作中他们会以任何方式受到自然科学的限制。事实上,人们可能会怀疑,数学是否不应仅凭自身而被当成一门科学,并且数学的本体论承诺是否不应基于隐含在数学实践中的理性方法而被判断。

受这些考虑的激发,麦迪开始研究隐含在数学实践中的有关存在的标准,

---

[33] Mark Colyvan, *The Indispensability of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 2001).

[34] Solomon Feferman, "Predicativity" (2005), in Stuart Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (Oxford: Oxford University Press, 2007), pp.590-624.

[35] Penelope Maddy, *Second Philosophy: A Naturalistic Method* (Oxford: Oxford University Press, 2007).

[36] Charles Parsons, "Mathematical Intuition," *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol.80(1980), pp.145-168.

以及基于这些标准数学所做的隐性的本体论承诺。[37] 她专注于集合论，以及数学共同体用于解决“哪一条大基数公理能够被看作是真的”这一问题的方法论考量。因此她的观点其实更接近哥德尔而不是奎因。在更晚近的工作中，她分析出两条似乎引导着集合论学家们考虑新的集合论原则之可接受性的准则：统一化（*unify*）和最大化（*maximize*）。[38] 针对集合论的“统一化”准则的诉求是，要提供一个在其中我们能例示或者模拟所有数学对象和数学结构的单一系统；“最大化”原则意味着集合论应当采用尽可能有力、数学成果尽可能丰富的集合论原则。

（三）紧缩柏拉图主义

贝奈斯（Paul Bernays）观察到，一个工作中的数学家会“天真地”（naively）以一种柏拉图主义方式对待她所处理的对象。他说，每一个工作中的数学家都是一个柏拉图主义者。[39] 但是，当这个数学家因为被哲学家盘问她的本体论承诺而暂停工作时，她就会裹足不前并且退到一个模糊的非柏拉图主义立场。有人认为，这表明有关数学对象和数学知识之本质的哲学问题在某些地方出了错。

卡尔纳普区分了内在于一个框架和外在于一个框架的问题。[40] 泰特（William Tait）已经详细探讨了像这样的区分如何能够应用到数学中。[41] 而其结果是一个可以被称为紧缩版本的柏拉图主义（a deflationary version of platonism）。

根据泰特，只有在（公理化的）数学框架之内，人们才能有意义地问并且合理地回答有关数学实体的存在问题。例如，如果一个人在数论的领域内工作，那么她就可以问是否存在具有给定性质的素数。这样的问题应当在纯粹数学的基础上判定。

---

[37] Penelope Maddy, *Realism in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1990).

[38] Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1997).

[39] Paul Bernays, "On Platonism in Mathematics" (1935), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (ed.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.258–271.

[40] Rudolf Carnap, "Empiricism, Semantics and Ontology" (1950), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.241–257.

[41] William Tait, *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History*.

哲学家们有踏出数学框架并且“从外部”询问数学对象是否的确(*really*)存在,以及数学命题是否的确为真的倾向。在这一问题上,他们要求的是数学真和数学存在陈述的超数学的或者形而上学的基础。泰特论证说,很难看出这样的外部问题有什么意义。他尝试紧缩它们,并将它们带到它们所属于的地方:数学实践自身。当然在这一点上,不是所有人都同意泰特。正是针对泰特带着轻蔑态度而研究的那类外部问题,林斯基(Bernard Linsky)和查尔塔(Edward Zalta)已经发展出系统精确地加以回答的方法。[42]

不出所料的是,在数学哲学中,泰特几乎没有用到哥德尔主义的数学直觉或者数学对象存在于“空间和时间之外”这一哲学论题。更一般地说,泰特相信数学并不需要哲学基础;他希望用数学说明数学自身。在这种意义上,他的立场让人们想起在科学哲学领域的实在论之争中亚瑟·芬(Arthur Fine)所倡导的(某种意义上维特根斯坦主义的)自然的本体论态度(*natural ontological attitude*)。

(四)贝纳塞拉夫的知识论问题

针对科学哲学领域中一大类柏拉图主义立场,贝纳塞拉夫(Paul Benacerraf)提出了一个知识论难题。[43] 论证直指例如哥德尔对数学直觉所作的说明。贝纳塞拉夫的论证始于“我们最好的知识理论是知识的因果理论”这一前提。其后被指出的是,根据柏拉图主义,抽象对象不存在于空间和时间之中,而有血有肉的数学家们却处在空间和时间之中。我们最好的知识理论告诉我们,有关数学实体的知识应当来自这些实体的因果互动。但很难想象这如何能成为事实。

今天,很少有知识论学者认为知识的因果理论是我们最好的知识理论。但即使知识论在变,贝纳塞拉夫难题依然十分坚挺有力。例如,为了便于论证,让我们假定可靠主义是我们最佳的知识理论。之后难题就变成说明“我们如何成功获取有关数学实体的可靠信念”。

---

[42] Bernard Linsky & Edward Zalta, “Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism,” *Journal of Philosophy*, vol.92(1995), pp.525-555.

[43] Paul Benacerraf, “Mathematical Truth” (1973), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.403-420.

赫兹(Harold Hodes)提出了一个贝纳塞拉夫知识论难题的语义学变种。[44] 根据我们现有最好的语义学理论,是人类与具体世界之间的因果—历史联系使我们的语词能够指称物理的实体和性质。根据柏拉图主义,数学指称抽象实体。因此,柏拉图主义者欠我们一个我们(拥有物理之身的人类)如何能够指称它们的可信的说明。而乍看起来,指称的因果理论似乎不能为我们提供数学论说中"指称的微结构"所需的说明。

(五)完全柏拉图主义

人们提出了一个致力于解决贝纳塞拉夫知识论难题的柏拉图主义新版本。[45] 它就是所谓的完全柏拉图主义(*plenitudinous platonism*)。这一理论的核心论题是每一个逻辑上一致的数学理论都必然指向一个抽象实体。表述了该理论的数学家知道或不知道它指向这一实体,很大程度上是非实质性的。通过支持一个一致的数学理论,数学家自动获得有关该理论的研究对象的知识。因此,从这个观点看,已经不存在需要解决的知识论难题。

在巴拉格(Mark Balaguer)的版本中,完全柏拉图主义假定了数学宇宙的多样性,其中每一个宇宙都对应一个一致的数学理论。因此,尤其是像连续统这样的问题(见 5.1 节)并没有唯一答案:在有些集合论宇宙中,连续统假设成立,在另一些中它不成立。然而不是每个人都同意这个图景能够被主张。马丁(Donald Martin)已经发展了一个论证,表明多重宇宙在很大程度上总是能够被"累进"到一个单一宇宙中。[46]

在林斯基和查尔塔版本的完全柏拉图主义中,由一个一致的数学理论所假定的数学实体恰好具有该理论赋予它的数学性质。例如,在既不能使连续统假设为真也不能使之为假的意义上,对应于 ZFC 的抽象实体是不完全的(*partial*)。原因是 ZFC 系统既不能推导出连续统假设,也不能推导出其否定。这不意味着所有一致地扩张 ZFC 的方法都同等有效。有些方法可能富有成果并且有力,其他的则并非如此。但这一观点的确否定有些一致地扩张 ZFC 的

[44] Harold Hodes, "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic," *The Journal of Philosophy*, no.3(1984), pp.123 – 149.

[45] Bernard Linsky & Edward Zalta, "Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism," *Journal of Philosophy*, vol. 92 (1995), pp. 525 – 555. Mark Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1998).

[46] Donald Martin, "Multiple Universes of Sets and Indeterminate Truth Values," *Topoi*, vol.20(2001), pp.5 – 16.

方法更可取是因为它们是由真原则构成的,而其他的包含了假原则。

四、结构主义和唯名论

贝纳塞拉夫的工作促使哲学家们在数学哲学中发展出了结构主义和唯名论理论。[47] 并且从 1980 年代起,结构主义和唯名论的结合体同样得到了发展。

(一) 数不能是什么

好像用一个难题给柏拉图主义增加负担还不够一样(3.4 节),贝纳塞拉夫给集合论柏拉图主义出了另一个难题[48]。这个难题具有如下形式。

存在无穷多将自然数认定为纯粹集合的方法。让我们不失一般性地将我们的讨论限制在这样两种方法上:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}:\\
&0=\varnothing\\
&1=\{\varnothing\}\\
&2=\{\{\varnothing\}\}\\
&3=\{\{\{\varnothing\}\}\}\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{II}:\\
&0=\varnothing\\
&1=\{\varnothing\}\\
&2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\\
&3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

贝纳塞拉夫提出的并不复杂的问题是:

它们中的哪些仅仅由真等同陈述构成:I 还是 II?

---

[47] Erich Reck & Michael Price, "Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics," *Synthese*, vol.125(2000), pp.341-383.

[48] Paul Benacerraf, "What Numbers Could Not Be" (1965), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.272-294.

要回答这个问题看来非常困难。不难看出应该如何在 I 的候选数和 II 的候选数上定义后继函数、加法运算和乘法运算，并且使我们视其为真的算术陈述因此为真。事实上如果用自然的方式完成这一点，那么，我们将得到同构（*isomorphic*）的结构（集合论意义上的"同构"），并且，同构结构使得相同的语句为真（它们是初等等价的［*elementarily equivalent*］）。只有当我们问算术之外的问题，比如说"$1\in 3$ 吗？"时，两种有关自然数的阐释（account）才会给出不同的答案。因此，不可能两种阐释都正确。根据 I，$3=\{\{\{\varnothing\}\}\}$，而根据 II，$3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$。如果两种阐释都正确，那么，等同的传递性将导致一个纯粹的集合论谬误。

总的来说，我们目前的处境是这样的。一方面，看起来没有理由说一种阐释优于另一种阐释。另一方面，这些阐释不可能都正确。这种尴尬的处境有时被称作贝纳塞拉夫认定难题（Benacerraf's *identification problem*）。

从这个难题中我们能得出的结论似乎是，阐释 I 和阐释 II 都不正确。由于当和其他看上去合理的将自然数还原为集合的尝试相比较时，会产生类似的考虑，那么自然数似乎终究不是集合。更何况，很清楚可以为有理数、实数提出相似的论证……贝纳塞拉夫总结说，它们终究也都不是集合。

像哥德尔（这样的柏拉图主义者）是否接受将自然数还原为纯集合（pure sets）并不清楚。一个柏拉图主义者可以坚持"自然数能够嵌入（embedded）到集合论宇宙中"这一说法，同时坚持这种嵌入不应当被视为本体论还原。事实上，在林斯基和查尔塔的完全柏拉图主义阐释中，自然数并不具有除了我们的自然数理论（皮亚诺算术）赋予它们的性质以外的性质。但是，在有理数、复数等方面，柏拉图主义者似乎将不得不采取类似的路径……尽管认为自然数自成一类无可否认地有一些吸引力，认为例如复数同样自成一类却并不自然。并且无论如何，即使自然数、复数等等在某种意义上不可还原为任何别的事物，人们也可能怀疑是否也许不存在别的阐明它们的本质的方法。

（二）柏拉图式的结构主义

夏皮罗（Stewart Shapiro）在代数的（*algebraic*）和非代数的数学理论（*non-algebraic*）之间做了很有用的区别。[49] 粗略地说，初看是有关一个独特模型，也就是该理论的所求（*intended*）模型的理论就是非代数理论。我们已经看到这些理

---

[49] Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (Oxford: Oxford University Press, 1997).

论的例子:算术,数学分析……相反,代数理论在给人的初始印象中并不声称有关某个独特模型。这类例子有群论、拓扑论、图论……

贝纳塞拉夫的挑战可以针对非代数理论似乎在描述的对象而提出。但是,他的挑战并不适用于代数理论。代数理论对数学对象的本质不感兴趣;它们感兴趣的是数学对象的结构性方面。这使得贝纳塞拉夫猜测,对非代数理论而言,相同的结论是否无法为真。或许从贝纳塞拉夫的认定疑难中我们能总结的教益是,甚至算术也不描述特定的数学对象而只是描述结构性关系?

夏皮罗和雷斯尼克(Michael Resnik)认为,所有的数学理论,甚至包括非代数理论,都描述结构(*structures*)。这一立场就是结构主义。[50] 结构由相互间具有结构性关系的位置(places)组成。因而相应地,数学理论描述结构中的位置或位子(positions)。但它们并不描述对象。因而在这一观点下,例如数三,将不是一个对象而是自然数结构中的一个位置。

系统(*Systems*)是结构的例示(instantiations)。例示由非代数理论描述的结构的系统彼此同构,并且因此对该理论的目的来说,同等地好。4.1节中描述的系统I和系统II可以被视为自然数结构的例示。对扮演数三的角色来说,$\{\{\{\varnothing\}\}\}$和$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$同等适合。但它们都不是数三。因为在自然数的结构中,数三是一个开放位置,而且这个开放位置不具有任何内在结构。除了和所要例示的结构相关的性质之外,系统通常还具有其他的结构性质。

能够在一个结构之内提出的才是合理的等同问题。作为问题,它们能够基于结构的结构性方面而得到回答。超出结构的等同问题没有意义。人们可以提出“$3\in 4$是否正确?'的问题,但这个问题并不有效,因为它犯了范畴错误。这个问题混淆了两种不同的结构:$\in$是一个集合论的观念,3和4却是自然数结构中的位置。对于贝纳塞拉夫的挑战来说,这似乎构成了一个满意的答案。

在夏皮罗看来,结构在本体论上并不依赖于例示它们的系统的存在。即使在自然中不存在无穷系统,自然数的结构仍将存在。夏皮罗所理解的结构是抽象的、柏拉图主义的实体。夏皮罗类型的结构主义通常被称为柏拉图式的(*ante rem*)结构主义。

在集合论的教材中,我们同样找到了关于结构的观念。粗略而言,集合论式的定义说“一个结构是一个有序的$n+1$元组,该$n+1$元组由一个集合,该集

[50] Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (Oxford: Oxford University Press, 1997). Michael Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns* (Oxford: Clarendon Press, 1997).

合上的一系列关系，以及该集合中一系列不同的元素组成”。但它不可能是数学哲学中结构主义所设想的结构的观念。因为，集合论的结构观念预设了集合概念，而根据结构主义，集合概念自身需要用结构的术语加以说明。或者换种说法，一个集合论结构仅仅是一个例示了本体论上先于它的结构的系统。

尽管如此，有什么动力将柏拉图式的结构主义扩展到最一般的数学学科，例如说（集合论）并不十分清楚。[51] 回忆一下，是因为贝纳塞拉夫认定难题，人们才到达对数学学科的结构主义理解。人们很难对集合论提出认定难题：人们通常不会用更基本的概念定义集合。

看起来柏拉图式的结构主义使用了多少有些循环的方式描述了结构观念。结构被描述为相互之间具有一定关系的位置，但位置似乎不能独立于它所从属的结构而被描述。但这并不必然构成一个问题。对柏拉图式的结构主义而言，结构观念是一个初始概念，无法用其他更基本的术语加以定义。我们至多可以为数学结构构造一个公理化理论。

但贝纳塞拉夫的知识论难题看上去仍然亟待解决。结构以及结构中的位置可能不是对象，但它们是抽象的。因此，很自然人们就可以怀疑我们如何成功获得关于它们的知识。这一问题被一些哲学家看成发展数学唯名论，并使之与结构主义的基本论题相协调的原因之一。

（三）没有抽象实体的数学

早些时候，古德曼（Nelson Goodman）和奎因曾试图攻克这一难题：他们曾启动这样一个方案，即在避免使用抽象实体的前提下重新表述数学理论。[52] 科学理论的唯名论构造被证明是一个很困难的任务。奎因就是在这一最初尝试之后放弃该任务的一个例子。在过去几十年中，人们提出了许多致力于给数学一个唯名论构造的理论。《一个没有对象的学科：数学唯名论解释的策略》[53]即包含了对这些观点的很好的批判性探讨。

在对数学的唯名论重构中，具体实体将会扮演在数学的柏拉图主义阐释中抽象对象将扮演的角色，并且具体关系（例如局部—总体关系）将被用来模拟数学对象之间的数学关系。但这里就有了问题。首先，希尔伯特已经观察到，给定量子

---

[51] John Burgess, *Rigor and Structure* (Oxford: Oxford University Press, 2015).

[52] Nelson Goodman & Willard V.O. Quine, "Steps Towards a Constructive Nominalism," *Journal of Symbolic Logic*, vol.12(1947), pp.97－122.

[53] John Burgess & Gideon Rosen, *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1997).

力学中自然的离散性,自然科学最终可能会宣称只存在有穷多的具体实体。[54] 但看上去,我们仍然需要无穷多的具体对象来扮演自然数的角色——更不用说实数了。唯名论者从哪儿能找到所要求的具体对象的集呢?第二,即使假定存在无穷多的具体对象,甚至像原始递归算术这样的初等数学理论能否被唯名论关系模拟也并不清楚。[55]

菲尔德(Hartry Field)对牛顿物理学的唯名论重构做出了非常认真的尝试。[56] 他的基本观点是这样的。菲尔德希望使用实数的具体替代物及其上的函数(完成重构)。对空间连续统他采纳了实在论的立场,并认为在物理上空间区域(regions of space)和椅子、桌子一样真切。他也将空间区域视为具体的(因为它们毕竟也位于空间中)。若也算上不连续区域,那就存在和实数的子集一样多的牛顿空间(Newtonian space)的区域。因而,存在足够多的具体实体来扮演自然数、实数以及实数上的函数的角色。而实数及其上的函数理论是表述牛顿力学所需的全部。当然,为一个真正当代的科学理论,比如说量子力学提供唯名论重构会更加有趣一些。但鉴于这一方案能在牛顿力学的范围内被执行,最初的乐观主义在某种程度上就得到了辩护。

这一方案显然有其局限性。因为唯名论地解释实数上的函数空间理论或许是可能的。但沿着菲尔德的路径给集合论一个唯名论的解释却显得难以置信。尽管如此,如果在其限定的范围内成功,那么菲尔德的纲领的确有货真价实的成就。因为这将意味着至少在某种程度上,数学实体看来究竟是可或缺的。他也将在削弱为数学中的奎因式温和柏拉图主义所作的不可或缺性论证方面取得重要进展,因为在某种程度上,数学实体看起来究竟是可或缺的。

只有当希尔伯特的担心,也就是在一个很基本的意义上,我们最好的自然科学理论可能会推导出世界上只有有穷多的具体对象是毫无根据的,菲尔德的策略才有起作用的机会。如果一个人同情希尔伯特所担忧的却不相信抽象对象的存在,那么他可能会面临这样的艰难任务,并宣称只有有穷多的数学实体,由此与初等算术的基本原则相矛盾。这就导向了一个被称作超有穷主义(ultra-finitism)的立场。[57]

---

[54] David Hilbert, "On the Infinite" (1925), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.183-201.

[55] Karl-Georg Niebergall, "On the Logic of Reducibility: Axioms and Examples," *Erkenntnis*, vol.53 (2000), pp.27-62.

[56] Hartry Field, *Science without Numbers: A Defense of Nominalism* (Oxford: Blackwell, 1980).

[57] Alexander Essenin-Volpin, "Le Programme Ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques" (1961), in L. Henkin (ed.), *Infinistic Methods* (New York: Pergamon Press, 1961), pp.201-223.

在大多数阐释中，超有穷主义如同直觉主义将导向数学中的修正主义。因为例如说，看上去人们可能会不得不承认存在一个最大的自然数。从外部看，一个仅仅假定有穷数学宇宙的理论是证明论地弱的，并且因此非常倾向于一致。但是武丁(Hugh Woodin)已经提出了一个论证，它致力于从超有穷主义的角度表明，我们没有基础断定超有穷主义理论倾向于一致。[58]

先不谈这一论证(这里没有讨论它的细节)，很多人发现"存在最大自然数"这一论断已经难以接受。但是，拉维尼(Shaughan Lavine)已经论述了一个精致的在数学上并非修正主义的集合论超有穷主义。[59] 对于 ZFC 的原则如何能够被视为描述了确定有穷的集合，假定它们中包含了任意地大的集合，他也发展了一个详细的阐释。

(四) 亚里士多德式的结构主义

菲尔德对算术和分析的物理主义解释不仅削弱了奎因—普特南不可或缺性论证。它也部分为贝纳塞拉夫的知识论挑战提供了一个回答。给人类如何能够获得有关空间—时间区域的知识一个说明是一个公认的难题。但至少在许多(但不是所有)哲学家看来，空间—时间区域是物理上真切的。因此，我们不再被要求解释血肉之躯的数学家们如何能与非物理实体产生关联。但是，贝纳塞拉夫认定难题仍然存在。人们可能会怀疑，为什么是这一个空间—时间点或者区域而不是另一个扮演了比如说数 π 的角色。

为了回应认定难题，看起来，将结构主义方法和菲尔德的唯名论结合起来颇有吸引力。这就导向了不同版本的唯名论结构主义(*nominalist structuralism*)，它们的大纲是这样的。让我们集中在数学分析上。唯名论结构主义者否认某个具体的物理系统是分析的唯一可欲的解释。所有具体物理系统，只要满足实分析(RA)的基本原则，将同等胜任自己的角色。因此，分析语言中语句 ϕ 的内容(粗略地)以如下方式被给定：

每一个使得 RA 为真的具体系统 S，都使 ϕ 为真。

这就得出，同柏拉图式的结构主义一样，只有结构性方面和数学陈述的真假相关。但是，不同于柏拉图式的结构主义，这里并不假定具体系统之外的抽

[58] Hugh Woodin, "The Realm of the Infinite" (2011), in Hugh Woodin & Michał Heller (eds.), *Infinity: New Research Frontiers* (New York: Cambridge University Press, 2011), pp.89-118.

[59] Shaughan Lavine, *Understanding the Infinite* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1994).

象结构。

根据亚里士多德式的结构主义(*in rebus structuralism*),不存在使它们得以被例示的系统之外的抽象结构;结构仅存在于例示它们的系统之中。基于这一原因,唯名论的亚里士多德式结构主义有时被描述为“没有结构的结构主义”。唯名论结构主义是一种亚里士多德式的结构主义。但亚里士多德式的结构主义没有被唯名论结构主义穷尽。甚至,将数学视为有关集合论意义上结构的柏拉图主义也可以被视为一种形式的亚里士多德式结构主义。

在数学论说中,非代数结构(例如“那一个”自然数结构[such as ‘the’ natural numbers])和数学对象(例如“那一个”数1)由确定摹状词指称。这强烈地暗示了数学结构(N,1)有一个独特的指称,而不是如同在亚里士多德式结构主义中那样有一个“被分配”的指称。但亚里士多德式结构主义者论证说,这样的数学符号起的是专门的变元(*dedicated variables*)的作用,如同二战口号“汤米需要家乡寄来的信”中,名字“汤米”被选来代表任意具体的战士,在许多场合中再次使用却不改变其所指一样。[60]

如果在“不存在使得数学分析的假定为真的具体物理系统”的意义上,希尔伯特的担心有其依据,那么,上述使分析语言中语句 ϕ 获得内容的唯名论结构主义即弄错了这种句子的真之条件。因为若此,对每一个全称量化语句 ϕ,它的释义都将空洞地真。因此,需要一个“存在可以作为 RA 模型的具体物理系统”这种意义上的存在假定来支撑上述对数学陈述内容的分析。可能某种类似菲尔德构造的内容足以满足需求。

普特南先前注意到,如果对上述数学语句内容的阐明做一些修正,一个实质上更弱的背景假定就足以获得正确的真之条件。[61] 普特南提出了下述对分析语言中一个语句 ϕ 之内容的模态阐述:

必然地,每一个使得 RA 为真的具体系统 S,都使 ϕ 为真。

相比于先前的非模态阐明,这是一个更强的陈述。但看起来同样合理。并且,这种阐明的一个优点是,接下来的模态存在性背景假设足以给出数学陈述正确的真之条件:

---

[60] Richard Pettigrew, “Platonism and Aristotelianism in Mathematics,” *Philosophia Mathematica*, vol.16(2008), pp.310-332.

[61] Hilary Putnam, “Mathematics without Foundations” (1967), in Paul Benacerraf & Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, 1983), pp.295-311.

“存在一个可以作为 RA 模型的具体的物理系统”是可能的。

(这里“可能”的含义是“真实的或有可能已经是真实的(It is or might have been the case that)”。)现在希尔伯特的担忧似乎已经得到充分的应对。因为在普特南的说明下,数学语句的真就不再依赖于有关现实世界的物理假定。

给“我们如何知道这个模态假定实现了”一个说明是公认地不易。但人们或许可以希望这个任务看上去不像说明“我们如何成功知道有关抽象对象的事实”那样令人生畏。而且不应被忘记的是,这一(模态)唯名论立场的结构主义方面抵挡了贝纳塞拉夫认定难题。

普特南的策略同样有其局限性。齐哈拉(Charles Chihara)不仅将普特南的策略应用到算术和分析上,也致力于将其应用到集合论上。[62] 因此,一个相应的模态存在性假设的粗略版本就变成:

存在能够充当 ZFC 模型的具体物理系统是可能的。

帕森斯已经提到,当包含其元素数目为大超穷基数,甚至可能大到不具有基数的物理实体之集合的可能世界被需要时,就很难认为它们是可能的具体或物理世界。[63] 我们似乎没有理由相信可能存在包含高度超穷多实体的物理世界。

(五) 虚构主义

根据之前的提议,当给以合适的比如说唯名论地解释时,一般数学陈述是真的。我们现在将要讨论的对数学的唯名论的阐释认为,所有存在性数学陈述都是假的,这仅仅是因为不存在数学实体(出于同样原因,所有全称数学陈述都将平凡地为真。)

虚构主义认为,数学理论就像是童话或者小说等虚构故事。数学用文学虚构描述虚构人物的方式描述虚构的实体。这一立场最初在《实在论、数学和模态性》[64]的导论章节中得到了表述,近年来已经开始流行。

对虚构主义立场的粗略描述,一下子就引出这样一个问题:虚构实体是什么实体?看起来这似乎是一个艰深的形而上学本体论问题。一个彻底避免这

---

[62] Charles Chihara, *Ontology and the Vicious Circle Principle* (Ithaca: Cornell University Press, 1973).

[63] Charles Parsons, “The Structuralist View of Mathematical Objects,” *Synthese*, vol.84(1990), pp.303-346.

[64] Hartry Field, *Realism*, *Mathematics & Modality* (Oxford: Blackwell, 1989).

一问题的方法是:否定存在虚构实体。数学理论应当被视为参加假装游戏(games of pretence)的邀请,在其中我们表现得好像存在特定的数学实体。假装或者使信算子(make-believe operators)使它们的命题对象免于存在输出(existential exportation)。[65]

无论如何,如同以上所说,基于虚构主义观点数学理论不是字面意义上为真。尽管如此,数学使真理得到了清晰的表达。因而如果我们希望获得真,那么当我们肯定一个涉及数学的物理理论时,我们必须从字面所说的内容中减去(*subtract*)一些东西。但这要求一个有关内容减除何以起作用的理论。《有关性》[66]中已经发展了一个这样的理论。

如果虚构主义论题正确,那么一个必须向数学理论提出的要求自然是一致性。除此之外,菲尔德又提出了第二个要求:数学必须对自然科学理论保守(*conservative*)。这意味着,粗略而言,借助数学而从一个经验理论中推出的陈述,在不借助任何数学理论的前提下原则上也应能被推出。如果实际情况并非如此,那么最终就会出现针对虚构主义的不可或缺性论证。例如,数学是否事实上对物理学保守到目前为止仍然有争议。夏皮罗已经表述了一个致力于反驳菲尔德论断的不完备性论证。[67]

如果的确不存在数学(虚构)实体,正如某个形式的虚构主义所认为的,那么就不会产生贝纳塞拉夫的知识论难题。因而相比于大多数形式的柏拉图主义,虚构主义和数学的唯名论重构一起分享了这一优点。但诉诸假装算子就会得出,数学语句的逻辑形式会因此多少与它们的表面形式不同。如果存在虚构对象,那么可以认为数学语句的表面形式和它们的逻辑形式一致。但如果它们作为抽象实体而存在,就会重新出现贝纳塞拉夫的知识论难题。

贝纳塞拉夫的认定难题是否被解决并不完全清楚。总体而言,虚构主义是一个非还原论的说明。因为数学"故事"(stories)不同,一个数学理论中的实体是否等同于出现在另一个理论中的实体并不确定。但伯吉斯(John Burgess)仍然正确强调了数学和文学虚构的不同,因为虚构人物通常仅仅局限于一部虚构作品中,而同样的数学实体出现在多样的数学理论中。[68] 毕竟,有相同名字的实

---

[65] Mary Leng, *Mathematics and Reality* (Oxford: Oxford University Press, 2010).

[66] Stephen Yablo, *Aboutness* (Princeton: Princeton University Press, 2014).

[67] Stewart Shapiro, "Conservativeness and Incompleteness," *Journal of Philosophy*, vol.80(1983), pp.521-531.

[68] John Burgess, "Mathematics and Bleak House," *Philosophia Mathematica*, vol.12(2004), pp.37-53.

体（例如 π）出现在了不同的理论中。可能虚构主义者可以坚持说，当数学家发展了一个新的理论，但其中出现了“旧”的数学实体，那么所述实体就变得更清楚了。相比从前，它被赋予了更多确定的性质，而只要能维持总体的一致性，这就完全没有问题。

对形式主义的典范性反对意见似乎同样适用于虚构主义。虚构主义者需要为如下事实找一些说明：某种扩张已经存在的数学理论的方式，比另一种与之不相容的扩张数学理论的方式更可取。通常来说，至少表面上存在一个正确的扩张数学理论的方式。

五、特殊话题

在近年，数学哲学的子学科开始兴起。它们的发展方式不完全由有关数学本质的“大争论”决定。在这一节中，我们将考察这些分支中的一部分。

（一）基础与集合论

许多人将集合论视为某种意义上的数学基础。看起来，几乎所有的数学分支都能在集合论中被展开，即使有时候这样做并不自然。在近年，集合论哲学自身作为一门哲学分支已经开始浮现。这不是说，例如在集合论哲学特定的争论中，一个人是从形式主义的观点还是从柏拉图主义的观点研究它们并不会造成巨大的区别。

集合论最适合充当数学基础的论题并非没有争议。在过去的几十年中，范畴论（*category theory*）已经作为扮演这一角色的竞争对手而出现。范畴论是从20世纪中叶开始发展的数学理论。不像在集合论中，范畴论中的数学对象仅仅被定义到同构层次。这意味着不能针对范畴论的概念和“对象”提出贝纳塞拉夫认定难题。与此同时，（粗略地说）在集合论中可以完成的每件事在范畴论中也能被完成（但方式不一定总是自然）。这意味着从一个结构主义者的视角而言，范畴论是提供数学基础的颇有吸引力的候选。[69]

一个从一开始就对集合论而言重要的问题涉及集合和真类（proper classes）之间的差别。（在范畴论中，这一问题有其自然的对应问题：小范畴和大范畴之间的差别。）康托尔的对角线论证使我们认识到，集合论宇宙作为总体不能被当

[69] Colin McLarty, “Exploring Categorical Structuralism,” *Philosophia Mathematica*, vol.12(2004), pp.37－53.

做集合。康托尔定理表明,任意给定集合的幂集(也就是所有子集的集),其基数比自身的基数大。现在假定集合论宇宙形成了一个集合:所有集合的集合。那么所有集合之集合的幂集将是该集合的一个子集。这将和“所有集合之集合的幂集的基数大于所有集合之集合的基数”这一事实矛盾。因此,我们必须得出结论说:集合论宇宙无法形成一个集合。

康托尔称那些过大而无法被视为集合的复量(plurality)为不一致多数(*inconsistent multiplicities*)。[70] 今天,康托尔的不一致多数被称为真类。有些数学哲学家认为真类仍然构成单元,并且因此可以被视为一种类型的集。延续康托尔的精神,它们因为过大而无法成为集合。尽管如此,这一观点还是存在问题。正如不可能存在所有集合之集合,基于对角线化的原因,同样不可能存在所有真类之真类。因此,真类的观点似乎被迫还要接受有一个超真类(super-proper classes)的领域,等等。出于这一原因,策梅洛声称真类根本不存在。这一观点不如它乍看起来那么奇怪。仔细加以考察,人们会看到在 ZFC 中,人们从来不需要量化那些过大以至于无法成为集合的实体(尽管确实存在量化真类的集合论系统)。基于这一观点,集合论宇宙是潜无穷的(在这个词的绝对的意义上)。它从来不作为一个完成的整体而存在,而是永远增长并且因此永远未完成(unfinished)。[71] 这种谈论方式表明,在我们理解潜无穷这一观念的尝试中,我们被导向了时态化的隐喻。毫不奇怪,这些时态化的隐喻引起了一些数学哲学家们的强烈不适。

集合论哲学中的第二个主题涉及为已被接受的数学基本原则,比如 ZFC 的公理而辩护。一个重要的历史案例研究是在 20 世纪的最初几十年,选择公理逐步被数学社群接受的过程。[72] 该案例研究的重要性很大程度上归功于数学共同体内部曾举办的有关其可接受性的公开而直接的讨论。在这一讨论中,接受或拒绝将某一原则作为公理的一般原因得以浮现。在系统这一边,人们研究了两种致力于一举为 ZFC 所有公理辩护的界定集合概念的方式。一方面,存在对集合的迭代性界定(*iterative conception*),它描述了将集合论宇宙视为通过

---

[70] George Cantor, *Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts*, ed. Ernst Zermelo (Berlin: Julius Springer, 1932).

[71] Ernst Zermelo, “On Boundary Numbers and Domains of Sets” (1930), trans. Michael Hallett, in William Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in Mathematics* (*Volume 2*) (Oxford: Oxford University Press, 1996), pp.1208－1233.

[72] George Moore, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (New York: Springer Verlag, 1982).

幂集运算而从空集中生成出来是如何可能的。[73] 另一方面,有一个对集合的有限大小(*limitation of size*)的界定,其认为每一个没有因为过大而不能成为集合的集,都是一个集合。[74] 迭代性集合概念为 ZFC 的有些公理(比如说幂集公理)做了非常好的说明,但在其他公理上,例如说置换公理上就没那么成功。[75] 集合的有限大小概念能为其他公理(比如分类公理)做更好的说明。因此可以说并没有能够清楚地为 ZFC 所有公理辩护的齐一的界定(*uniform* conception)。

对超出 ZFC 的推定公理的说明构成了集合论哲学的第三焦点所在。[76] 大基数公理(*large cardinal axioms*)构成了一类这样的原则。如今大基数假说已经被视为意味着在集合论宇宙和集合论的内模型之间的某种嵌入属性(embedding properties)。大多数时候,从大基数原则中可以推出存在比任何 ZFC 所能保证其存在的集合更大的集合。

较弱的大基数原则受到内在证据的支持(见第 3.1 节)。它们是从所谓的反思原则(*reflection principles*)中得出的。这些原则陈述的是作为总体的集合论宇宙如此丰富,因而它与自身一些集合大小的初始片段非常相似。较强的大基数原则至今只受到外在的支持。许多研究者怀疑,例如说能否找到支持它们的反思原则[77];然而其他人并不同意这些意见。[78]

哥德尔希望在这些大基数公理的基础上,集合论中最重要的开放问题最终能被解决。(所谓最重要的开放问题)就是连续统难题(*the continuum problem*)。康托尔在 19 世纪晚期提出了连续统假说(*continuum hypothesis*)。它说的是:不存在这样的集合 S,在为其与自然数之间建立一一对应时,它太大;在为其与实数之间建立一一对应时,它太小。尽管付出了很多艰苦努力,所有试图解决连

---

[73] George Boolos, "The Iterative Conception of Set" (1971), in George Boolos, *Logic, Logic, and Logic* (Cambridge: Harvard University Press, 1998), pp.13 - 29. Øystein Linnebo, "The Potential Hierarchy of Sets," *Review of Symbolic Logic*, vol.6(2013), pp.205 - 228.

[74] Michael Hallett, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size* (Oxford: Clarendon Press, 1984).

[75] Michael Potter, *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction* (Oxford: Oxford University Press, 2004).

[76] Penelope Maddy, "Believing the Axioms I, II," *Journal of Symbolic Logic*, vol.53(1988), pp.481 - 511, 736 - 764. Donald Martin, "Mathematical Evidence" (1998), in H.G. Dales & Gianluigi Oliveri (eds.), *Truth in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press, 1998), pp.215 - 231.

[77] Peter Koellner, "On Reflection Principles," *Annals of Pure and Applied Logic*, vol.157(2009), pp.206 - 219.

[78] Peter Welch & Leon Horsten, "Reflecting on Absolute Infinity," *Journal of Philosophy*, vol.113 (2016), pp.89 - 111.

续统假说的尝试都失败了。哥德尔开始猜测,连续统假说独立于集合论(ZFC)已被接受的原则。1940年左右他成功表明连续统假定与ZFC一致。数十年之后,保罗·科亨(Paul Cohen)证明连续统假说的否定也与ZFC一致。因此哥德尔有关连续统假说独立性的猜想最终得到了证明。

但哥德尔对运用大基数公理解决连续统难题的希望却没有根据。即使在有大基数公理的背景下,连续统假说仍然独立于ZFC。尽管如此,大基数原则成功解决了一些受限版的连续统假说(答案是肯定的)。所谓武丁基数的存在性确保了分析中可定义的集合或者是可数的,或者具有连续统的大小。因而可定义的连续统难题(the *definable continuum problem*)已经被解决。

在近年,人们的尝试聚焦在找一种不同类型的原则,它们既是得到辩护的,并且同样也许能判定连续统假说。[79] 从这项研究中浮现的一个更一般的哲学问题是:一个原则要能成为推定的数学基本公理,它应当满足什么条件?

有些希望判定连续统假说的研究者认为它是真的,有些认为它是假的。但同样有许多集合论学家和数学哲学家认为,连续统假说不仅在ZFC中不可判定,而且是绝对地不可判定,也就是它既不能被证明(在这个词的非形式[informal]意义上),也不能被否证(在这个词的非形式意义上),原因是它既不真也不假。例如如果数学宇宙是一个集合论的多重宇宙(*a set theoretic multiverse*),那么,存在同等(好)的模型使得连续统假说是真的,以及同等好的模型使得它是假的。此外就不用多说什么了。[80]

(二)范畴性

在19世纪下半叶,戴德金证明从同构的角度看算术的基本公理恰好只有一个模型,对实分析的基本公理而言也是如此。从同构的角度看,如果一个理论恰好只有一个模型,那么它就是范畴性的(*categorical*)。因此以同构为模,算术和分析各自恰好只有一个所求模型。半世纪以后,策梅洛证明集合论的原则是"近乎"范畴性或准范畴性的(*quasi-categorical*):对于集合论原则的任意两个模型 M_1 和 M_2,或者 M_1 与 M_2 同构,或者 M_1 同构于 M_2 的一个强不可及的

---

[79] Hugh Woodin, "The Continuum Hypothesis. Part I," *Notices of the American Mathematical Society*, vol.48(2001), pp.567-578. Hugh Woodin, "The Continuum Hypothesis. Part II," *Notices of the American Mathematical Society*, vol.48(2001), pp.681-690.

[80] Joel Hamkins, "Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?' *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.56(2015), pp.135-145.

阶，或者 M_2 同构于 M_1 的一个强不可及的阶。[81] 近年来，人们已经尝试发展一些论证以使策梅洛的结论能被强化为一个完全的范畴性论断；[82]但在这里，我们将不讨论这些论证。

同时，列文海姆—司寇伦定理告诉我们每个拥有至少一个其论域大小为无穷的模型的一阶形式理论，必然拥有其论域大小为任意无穷基数的模型。由于算术、分析和集合论的原则都最好有至少一个无穷模型，那么列文海姆—司寇伦定理似乎也适用于它们。这与戴德金的范畴性定理不冲突吗？

这一难题的解决方案在于戴德金甚至没有隐性地用算术和分析基本原则的一阶形式系统工作。相反，他非正式地用二阶形式系统工作。

让我们聚焦于算术看看这将导致什么。算术的基本假定包含了归纳公理。在算术的一阶形式系统中这被当成一个模式(scheme)而加以表述：对算术语言中每个带有一个自由变元的一阶公式而言，归纳原则的一个实例都被包含在算术的形式系统中。初等基数性方面的考量揭示了自然数有无穷多的属性没有被一阶公式表达。但直觉上归纳原则对自然数的所有性质都成立。因而在一阶语言中，我们无法表达数学归纳法原则的全部力量。基于这个原因，许多数学哲学家坚持认为算术的假定应当用二阶语言表达。[83] 二阶语言不仅包含统辖论域中元素的一阶量词，也同样包含统辖论域的性质（或子集）的二阶量词。完整的二阶逻辑要求二阶量词统辖论域的所有子集。如果算术原则在一个二阶语言中加以表述，那么戴德金的论证就行得通，我们就有一个范畴定理。基于相似的原因，若用二阶语言表述实分析的基本原则，我们将同样得到范畴定理，而集合论的二阶表述将是准范畴性的。

柏拉图式的结构主义以及对数学的模态唯名论结构主义解释都能从二阶表述中受益。如果柏拉图式的结构主义者希望坚持“从同构的角度看，自然数结构由皮亚诺公理确定”，那么她会希望用二阶逻辑表述皮亚诺公理。而且模态唯名论结构主义者会坚持算术的相关具体系统是那些使得二阶皮亚诺公理

---

[81] Ernst Zermelo, “On Boundary Numbers and Domains of Sets” (1930), trans. Michael Hallett, in William Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in Mathematics (Volume 2)* (Oxford: Oxford University Press, 1996), pp.1208－1233.

[82] Van McGee, “How We Learn Mathematical Language,” *Philosophical Review*, vol.106 (1997), pp.35－68. Donald Martin, “Multiple Universes of Sets and Indeterminate Truth Values,” *Topoi*, vol.20(2001), pp.5－16.

[83] Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic* (Oxford: Clarendon Press, 1991).

为真的系统。[84] 实分析和集合论也相似。因而,诉诸二阶逻辑似乎是在结构主义纲领中分离出所意图的数学模型的最后一步。

但在数学哲学中诉诸二阶逻辑并非没有争议。第一个反对意见就是二阶逻辑的本体论承诺比一阶逻辑的本体论承诺更高。毕竟运用二阶逻辑似乎将向我们承诺抽象对象“类”的存在。在回应该难题时,布洛斯(Boolos)表述了一个对二阶逻辑的解释,它避免了对抽象实体的承诺。[85] 在说明二阶量词的真值条款时,他的解释运用了复量表达式(plural expressions)的术语,而没有援引类(classes)。例如,一个具有 $\exists xF(x)$ 形式的二阶表达式会被解释为:“存在一些(一阶对象) x,它们具有性质 F”。这一解释被称作二阶逻辑的复量解释(*plural interpretation*)。在复量和集合的数学运用之间是否存在真实区别有争议。[86] 尽管如此诉诸二阶逻辑的复量解释将对唯名论版本的结构主义富有吸引力是清楚的。

第二个反对二阶逻辑的意见可以追溯到奎因。[87] 这一反对意见说的是对完整二阶逻辑的解释和集合论的问题密切相关。这一点已经由大多数系统化、规范化的二阶逻辑采用某个版本的选择公理作为自身的一条公理这一事实所表明。但更令人担忧的事实是,二阶逻辑和集合论深层次的问题比如说连续统假说不可分割地纠缠在一起。对于像算术这样意图描述一个对象的无穷集的理论而言,甚至像二阶量词辖域的基数性这样的基本问题都与连续统问题等价。同样,人们发现存在这样一个句子:它是一个二阶逻辑真理,当且仅当连续统假说成立。[88] 我们已经看到连续统问题相对目前已被接受的集合论原则独立。并且许多研究者相信它绝对地缺乏真值。如果这就是事实,那么正是在二阶无穷模型的观念中存在着内在的不确定性。并且许多当代数学哲学家认为后者并不具有确定的真值。因而人们论证到,完整二阶逻辑的(无穷)模型这一观念就是内在不确定的。

如果人们不想诉诸完整的二阶逻辑,那么还有其他方法确保数学理论的范

---

[84] Geoffrey Hellman, *Mathematics without Numbers* (Oxford: Clarendon Press, 1989).

[85] George Boolos, “Nominalist Platonism” (1985), in George Boolos, *Logic, Logic, and Logic* (Cambridge: Harvard University Press, 1998), pp.73–87.

[86] Øystein Linnebo, “Plural Quantification Exposed,” *Noûs*, vol.37(2003), pp.71–92.

[87] Willard V.O. Quine, *Philosophy of Logic* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 2nd edition, 1970).

[88] George Boolos, “On Second-Order Logic” (1975), in George Boolos, *Logic, Logic, and Logic* (Cambridge: Harvard University Press, 1998), pp.37–53.

畴性。一个办法是运用多少介于一阶和二阶之间的量词。例如可能有人会将“存在有穷多 x”当作初始量词。这会允许人们,比如说构造一个范畴性的算术公理化(系统)。

但是确保数学理论的范畴性并不要求引入更强的量词。将非形式的算法可计算性概念当作初始概念是另一种选项。[89] 田纳鲍姆(Stanley Tennenbaum)的一条定理表明,皮亚诺算术的所有一阶模型,如果在其中加法和乘法是可计算函数,那它们彼此同构。现在我们的加法和乘法是可计算的:否则我们从不可能学习这些函数。那么这就是另一种我们或许能够凭借它而将我们算术原则的意图模型分离出来的方法。但和这一阐释针锋相对的是,例如说,人们可能会指出所意图的实分析模型的范畴性无法用这种方式得到保障。对于实分析原则之模型上的计算而言,我们并没有扮演田纳鲍姆定理角色的定理。

如果接受算术谓词集的某种无限制性(open-endedness),那么人们可以在不越出一阶逻辑的边界以及不诉诸非形式的可计算性概念的前提下得到算术的某种范畴性定理。假定有两个数学家 A 和 B,他们用各自的言语方式(idiolect)断定了一阶皮亚诺算术公理。进一步假定 A 和 B 认为使数学归纳法的运用成为可能的谓词的集是无限制的,并且都愿意认为对方的归纳模式为真。那么,A 和 B 就有了使他们自己相信两种言语方式描述了同构结构的条件。[90]

(三)计算与证明

在近几年以前,计算这一主题在数学哲学中没有受多少注意。这可能部分是因为在数论的希尔伯特式公理化系统中,计算被还原为皮亚诺算术中的证明。但这一情况在近年得到了改变。由于计算在数学实践中的重要性不断增长,看来在未来几年中对计算这一观念的哲学反思将占据一个更加显赫的位置。

丘奇论题(Church's Thesis)在可计算理论中占据了一个核心位置。它说的是每一个算法可计算的自然数上的函数都能由图灵机计算。

作为一条原则,丘奇论题的地位有些不寻常。它看上去是一条基本原则。

---

[89] Volker Halbach & Leon Horsten, "Computational Structuralism," *Philosophia Mathematica*, vol.13 (2005), pp. 174 – 186. Leon Horsten, "Vom Zählen zu den Zahlen: On the Relation between Computation and Mathematical Structuralism," *Philosophia Mathematica*, vol.20(2012), pp.275 – 288.

[90] Charles Parsons, "The Uniqueness of the Natural Numbers," *Iyyun*, vol.13(1990), pp.13 – 44.

一方面,这条原则几乎普遍地为真。另一方面,很难看出它如何能被数学地证明。原因是它的前件里包含一个非形式概念(算法可计算性),而后件中包含一个纯粹数学概念(图灵机可计算性)。数学证明只能和纯粹数学概念相联系——或至少看上去如此。公认的看法是我们对丘奇这一论题的证据是准经验的。希望为丘奇论题找到有说服力的反例的尝试都失败了。人们也独立地提出许多动议(proposals)来数学地捕获自然数上的算法可计算函数。有别于图灵机可计算性,人们提出了广义递归性(general recursiveness),赫尔博兰德—哥德尔(Herbrand-Gödel)可计算性,lambda 可定义性等观念。但这些数学观念最终被证明是等价的。因此,用哥德尔的术语说,我们已经为丘奇论题积累了外部证据。

很久以前柯雷索(Georg Kreisel)已经指出,即使一个论题不能得到形式地证明,通过对直觉观念的严格但非形式的分析,仍然可能获得它的内在证据。[91] 柯雷索称这些活动是非形式地严格(*informal rigour*)。西格尔(Wilfried Sieg)详细的学术研究表明,图灵的《论可计算数及其对可判定性问题的一个应用》[92] 这一影响深远的文章构成了对算法可计算性的直觉概念的这类分析的一个精致的例子。[93]

目前在计算的基础与哲学领域中最活跃的研究主题似乎是这些。首先,人们已经投入精力研究结构上而非自然数上的算法的计算理论。尤其是,人们致力于获得不同结构上算法性计算的类似于丘奇论题的结果。在这一语境中,在发展实数上的有效计算理论方面,人们已经在近几十年中取得实质性进展。[94] 第二,人们已经尝试说明有别于人类依算法可计算的可计算观念。其中有特别意义的领域是量子计算领域。[95]

---

[91] Georg Kreisel, "Informal Rigour and Completeness Proofs" (1965), in Imre Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (Amsterdam: North-Holland, 1967).

[92] Alan Turing, "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" (1936), reprinted in Martin Davis (ed.), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions and Uncomputable Functions* (Hewlett: Raven Press, 1965), pp.116 - 151.

[93] Wilfried Sieg, "Mechanical Procedures and Mathematical Experience" (1991), in Alexander George (ed.), *Mathematics and Mind* (Oxford: Oxford University Press, 1994), pp.71 - 117.

[94] Marian Pour-El, "The Structure of Computability in Analysis and Physical Theory" (1999), in Edward Griffor (ed.), *Handbook of Computability Theory* (Amsterdam: Elsevier, 1999), pp.449 - 471.

[95] David Deutsch, Artur Ekert & Rossella Luppacchini, "Machines, Logic and Quantum Physics," *Bulletin of Symbolic Logic*, vol.6(2000), pp.265 - 283.

我们知道很多有关形式证明和形式可证性概念、它们与算法可计算性之间的联系以及统辖这些概念的原则之间的关系。我们知道,例如,一个形式系统的证明是计算可枚举的以及一个可靠的(足够强的)形式系统中的可证性受制于哥德尔不完备性定理。但我们能从数学期刊中找到的数学证明并不是逻辑学家意义上的形式证明:它是一个(严格的)非形式证明。[96] 对于非形式证明和非形式可证性概念以及统辖它们的法则,我们知道的就远少于形式证明和可证性概念。尤其是,尽管人们从1960年代初就开始争论这一问题[97],非形式数学可证性的外延是否与某些形式理论T中可证性的外延一致(coincides),或者非形式数学可证性这一概念是否清楚到足以让这一问题有一个明确的答案都并不清楚。[98]

过去几十年已经见证了计算机在其中扮演实质性角色的数学证明的首次涌现。四色定理就是一例。这一定理说的是,对任一地图,只需要四种颜色来给国家上色,就能确保任意两个有共同边界的国家颜色不同。[99] 但这一证明区分出许多由计算机验证的情形。这些计算机验证如此之长,以至于无法被人类复核。四色定理的证明引起的有关这一问题的争论是:在何种意义上,受助于计算机的证明仍然算作这个词真实含义上的证明?

普遍接受的观点是数学证明产生了先天知识。但当我们依赖计算机生成证明的一部分时,我们似乎要依赖电脑硬件的恰当运作以及电脑程序的正确性。这些看上去是经验性的因素。因此人们忍不住总结说计算机证明产生准经验的知识。[100] 换句话说,由于计算机证明的到来,证明概念已经失去了它纯粹先天的特征。其他人认为,当我们接受计算机证明时,我们所依赖的经验因素并不作为论证中的前提而出现。因而计算机终究能够产生先天知识。[101]

---

[96] John Myhill, "Some Remarks on the Notion of Proof," *Journal of Philosophy*, vol.57(1960), pp.461 - 471. Michael Detlefsen (ed.), *Proof, Logic and Formalisation* (London: Routledge, 1992).

[97] John Lucas, "Minds, Machines, and Gödel," *Philosophy*, vol.36(1961), pp.112 - 127.

[98] Philip Welch & Leon Horsten, "Reflecting on Absolute Infinity," *Journal of Philosophy*, vol.113(2016), pp.89 - 111.

[99] Kenneth Appel, Wolfgang Haken & John Koch, "Every Planar Map is Four Colorable," *Illinois Journal of Mathematics*, vol.21(1997), pp.429 - 567.

[100] Thomas Tymoczko, "The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance," *Journal of Philosophy*, vol.76(1979), pp.57 - 83.

[101] Tyler Burge, "Computer Proofs, A Priori Knowledge, and Other Minds," *Noûs*, vol.32(1998), pp.1 - 37.

六、未来

在20世纪,数学哲学的研究几乎总是围绕数学对象的本质、统辖它们的基本法则以及我们如何获得关于它们的数学知识而展开。这些是与传统形而上学和知识论问题密切关联的基础性问题(*foundational concerns*)。

20世纪下半叶,科学哲学中的研究很大程度上远离了基础问题,与科学知识和科学理解(scientific understanding)的增长相关的哲学问题变得更加中心。早在1970年代,就有这样的声音论证到:在数学哲学中也应当发生这样的转变。[102]

几十年间,数学哲学中的这种想法只存在于某些边缘化的思想流派中。但近年来,这一新运动与主流数学哲学之间的对立已经弱化。涉及数学实践的哲学问题、数学理论的演进以及数学说明和理解(mathematical explanation and understanding)地位已经变得更加显赫,也与数学哲学中更加传统的问题产生了关联。[103] 这一潮流在未来的几年中无疑会得到继续。

作为一个例子,让我们短暂地回到计算机证明的主题上(见5.3节)。数学家们面对计算机证明时产生的不适感的来源似乎是这样的:一个"好"的数学证明似乎不应止于使我们相信一个特定的陈述是真的。它也应当说明为什么题中的陈述成立。这是通过指向通常联系了不同数学领域的深层数学概念之间深层的数学关系而做到的。[104] 直到现在计算机证明通常只运用十分低层次的数学概念。在凭自身发展深刻概念这方面,它们是众所周知地弱,在联系不同数学领域中的概念时也存在困难。所有这些都将我们引向这样一个哲学问题——这个问题刚刚开始得到它所应得的注意:什么是数学理解?

(责任编辑:王聚)

---

[102] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations* (New York: Cambridge University Press, 1976).

[103] Paolo Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice* (Oxford: Oxford University Press, 2008).

[104] Kenneth Manders, "Domain Extensions and the Philosophy of Mathematics," *Journal of Philosophy*, vol.86(1989), pp.553-562.

作者简介：莱昂·霍斯顿（Leon Horsten），德国康斯坦茨大学哲学系教授。他擅长用数学方法探讨哲学问题，对当代形式真理论、模态逻辑、知识论和数学哲学均有独到贡献。

译者简介：张莉，清华大学哲学系博士研究生，研究方向为语言哲学、真之理论和数学哲学等。